



کانون ریاضیدانان زمان

المپیاد ریاضی

آزمون شماره: (۸)

تاریخ برگزاری: ۱۳۹۳/۰۲/۲۰

صفحه: «۱»

نام: نام خانوادگی: شماره کارت: زمان پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه
مقطع: دبیرستان پایه: سوم درس: حسابان - جبر و احتمال - هندسه ۲ تعداد سؤالات: ۴-۷-۴ واحد نمایندگی:

خانواده کرامی و دانش آموز عزیز

شما می‌توانید اطلاعات کامل نحوه‌ی اجرای کلاس‌های تابستان همراه با کتاب‌های ممتاز تابستانه و کلاس‌های طرح طلایی تیزهوشان را از نمایندگی‌های رسمی کانون در سراسر کشور دریافت نمایید.

نمره	بخش اول : حسابان
۷	۱- نامعادله‌ی قدر مطلق زیر را حل کنید. $ 2x - 1 \leq x + 2 $
۷	۲- بررسی کنید که تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ یک‌به‌یک است و ضابطه‌ی تابع معکوس آن را بیابید.
۷	۳- تابع زیر را در بازه‌ی داده شده رسم کنید. $y = 2x - [2x] \quad , \quad -1 \leq x < 1$
۸	۴- برای هر عدد حقیقی x نشان دهید: $\cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
۸	۵- مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} a \cos 2x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 + \sin x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در $x_0 = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد.
۸	۶- فرض کنید $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. معادله‌ی خط مماس بر نمودار f^{-1} را در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{2}$ واقع بر f^{-1} محاسبه کنید.



کانون ریاضیدانان زمان

المپیاد ریاضی

آزمون شماره: (۸)

تاریخ برگزاری: ۱۳۹۳/۰۲/۲۰

صفحه: «۲»

نام: نام خانوادگی: شماره کارت: زمان پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه
مقطع: دبیرستان پایه: سوم درس: حسابان - جبر و احتمال - هندسه ۲ تعداد سؤالات: ۴-۷-۴ واحد نمایندگی:

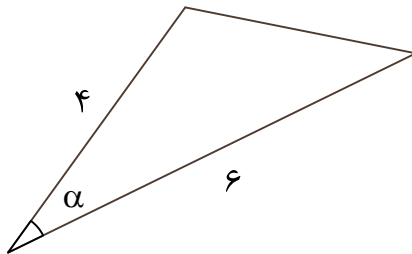
۷- به یکی از دو سؤال ستاره‌دار زیر پاسخ دهید. (دانش‌آموز گرامی در صورت پاسخگویی شما به هر دو سؤال، نمره‌ی یک سؤال لحاظ می‌گردد.)

۲

* (a) مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۴ و ۶ است و زاویه‌ی بین این دو ضلع مقدار متغیر α می‌باشد. الف) آهنگ تغییرات مساحت این مثلث نسبت به α را به دست آورید.

۳

ب) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات منفی، مثبت یا صفر است و معنای آن چیست؟



۵

* (b) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ، آن‌گاه با استفاده از قضیه‌ی فشردگی نشان دهید:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \left[\frac{1}{f(x)} \right] = 1$$

بخش دوم: جبر و احتمال

۵

۱- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید:

$$y^2 + 1 \geq 2x(y - x + 1)$$

۸

۲- هرگاه $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 15\}$ و $B = \{3^k \mid k \leq 1, k \in \mathbb{Z}\}$ ، تعداد اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A \times B$

ب) $(A \times B) \cap (B \times A)$

ج) $(A \times B) \cup (B \times A)$

د) $A^2 - B^2$



کانون ریاضیدانان زمان

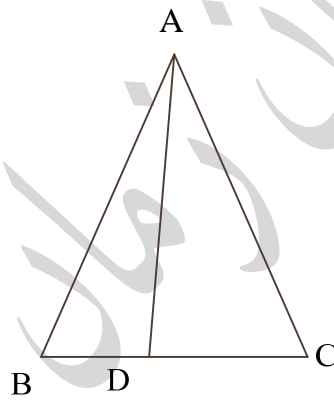
المپیاد ریاضی

آزمون شماره: (۸)

تاریخ برگزاری: ۱۳۹۳/۰۲/۲۰

صفحه: «۳»

نام: نام خانوادگی: شماره کارت: زمان پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه
مقطع: دبیرستان پایه: سوم درس: حسابان - جبر و احتمال - هندسه ۲ تعداد سؤالات: ۷-۴-۴ واحد نمایندگی:

۷	<p>۳- عددی به تصادف از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که:</p> <p>الف) عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ بخش پذیر نباشد، چه قدر است؟</p> <p>ب) عدد انتخابی نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چه قدر است؟</p>
۵	<p>۴- به یکی از دو سؤال ستاره‌دار زیر پاسخ دهید. (دانش‌آموز گرامی در صورت پاسخگویی شما به هر دو سؤال، نمره‌ی یک سؤال لحاظ می‌گردد.)</p> <p>* (a) نقطه‌ای به تصادف درون مثلثی قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین که طول وترش برابر $3\sqrt{2}$ است، انتخاب می‌کنیم. احتمال این که فاصله‌ی این نقطه از هر رأس مثلث از ۱ بیش‌تر باشد، چه قدر است؟</p> <p>* (b) درون مربعی به ضلع ۳ نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A این پیشامد باشد که فاصله‌ی نقطه‌ی انتخاب شده از هر یک از ضلع‌های مربع از ۱ بزرگ‌تر باشد، B این پیشامد باشد که فاصله‌ی نقطه‌ی انتخاب شده از دست کم یکی از ضلع‌های مربع از ۱ کم‌تر باشد و C این پیشامد باشد که فاصله‌ی نقطه‌ی انتخاب شده فقط از یکی از ضلع‌ها از ۱ کم‌تر باشد. پیشامدهای A، B و C را با نمودار ون نشان دهید.</p>
بخش سوم : هندسه (۲)	
۶	<p>۱- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر داشته باشیم $BD < DC$، ثابت کنید:</p> <div style="text-align: center;">  <p style="margin-left: 200px;">$\widehat{B\hat{A}D} < \widehat{D\hat{A}C}$</p> </div>



کانون ریاضیدانان زمان

المپیاد ریاضی

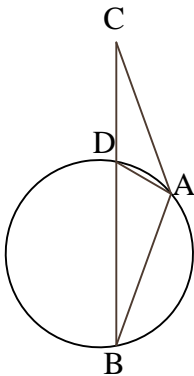
آزمون شماره: (۸)

تاریخ برگزاری: ۱۳۹۳/۰۲/۲۰

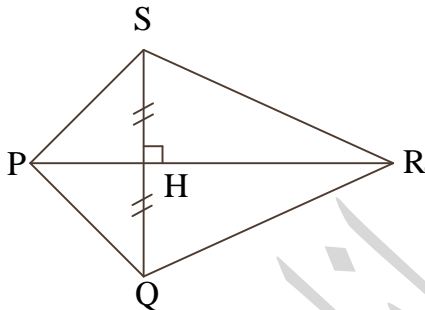
صفحه: «۴»

نام: نام خانوادگی: شماره کارت: زمان پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه
مقطع: دبیرستان پایه: سوم درس: حسابان - جبر و احتمال - هندسه ۲ تعداد سؤالات: ۴-۴-۷ واحد نمایندگی:

۷-۲ در دایره‌ی شکل زیر، مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطه‌ی D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.



۷-۳ در شکل زیر PR عمود منصف QS است. به کمک تبدیل‌ها ثابت کنید: $\hat{SPR} = \hat{QPR}$.



۴- به یکی از دو سؤال ستاره‌دار زیر پاسخ دهید. (دانش‌آموز گرامی در صورت پاسخگویی شما به هر دو سؤال، نمره‌ی یک سؤال لحاظ می‌گردد.)
* (a) ثابت کنید اگر خطی بر یکی از دو صفحه‌ی موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.
* (b) اگر P_1 ، P_2 و P_3 سه صفحه‌ی دو به دو متقاطع باشند، ثابت کنید فصل مشترک‌های این سه صفحه یا سه خط موازی هستند و یا هر سه از یک نقطه می‌گذرند.

﴿ برنامه‌ریزی دقیق و تلاش مستمر رمز پیروزی است ﴾

دپارتمان دبیرستان