بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی (۱) پایه دهم دوره دوم متوسطه

جـــامـــع

رشته‌های ریاضی و فیزیک ـ علوم تجربی

تألیف: دپارتمان متوسطه دوم مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان

نظارت عالی: علی خزایی

عنوان و نام پدیدآور : ریاضی (۱) پایه دهم دوره دوم متوسطه جامع رشته‌های ریاضی و فیزیک —علوم تجربی
مشخصات نشر : تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری : ۲۶۶ ص.؛ ۲۲×۲۹ سم.
شابک : 978-600-7903-77-3
وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
شناسه افزوده : خزائی، علی، ۱۳۴۸ -
شناسه افزوده : کانون ریاضیدانان زمان
شماره کتابشناسی ملی : ۴۴۸۷۹۹۲

نام کتاب: **ریاضی (۱) پایه دهم دوره دوم متوسطه جامع**
تألیف: **دپارتمان متوسطه دوم مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان**
شابک: **۹۷۸ـ۶۰۰ـ۷۹۰۳ـ۷۷ـ۳**
ISBN:978-600-7903-77-3
نوبت چاپ: **چاپ اول ـ ۱۳۹۵**
تیراژ: **۱۰۰۰ جلد**

تعداد صفحات: ۲۶۶ صفحه
قیمت: ۳۰۰۰۰ تومان

ناشر: موسسه کانون ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز پخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)
فروشگاه دائمی: تهران - میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی – نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳

پیش‌گفتار

گستردگی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف من‌جمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری و افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

۱) **مجموعه کتاب‌های تابستانه:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

۲) **مجموعه کتاب‌های مقدماتی:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۳) **مجموعه کتاب‌های پیشرفته:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

۴) **مجموعه کتاب‌های جامع:** این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب، سؤالات تشریحی بدون پاسخ و سؤالات چهارگزینه‌ای همراه با پاسخ کلیدی و شگفتی‌های ریاضی در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۵) مجموعه کتاب‌های تیزهوشان: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول (راهنمایی) برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول (راهنمایی) پیشنهاد می‌گردد.

۶) مجموعه کتاب‌های موضوعی: این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

۷) مجموعه کتاب‌های یکی من، یکی تو: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤال‌های «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یک‌دیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

۸) مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به‌صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمونی از آن فصل به عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و هم‌چنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش فرهنگ ریاضی

مقدمه

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

سخنی از انیشتین:

❋ نکته مهم این است که هرگز دست از پرسش نکشیم. کنجکاوی همیشه موجب شور و هیجان است. انسان هنگامی که به رازهای ابدیت، زندگی و ساختار شگفت انگیز واقعیت می اندیشد، بی اختیار دچار هراس و حیرت می شود. کافی است که انسان بکوشد تا هر روز، اندکی از این اسرار را دریابد. هرگز کنجکاوی مقدس را از دست ندهید. ❋

خداوند بزرگ را سپاس می‌گوییم که توفیق دیگری نصیب کرد تا بتوانیم خدمتی هر چند کوچک در پیش‌برد علم و دانش این سرزمین عزیز بنماییم.

یکی از راهبردهای مهم یادگیری، آموزش دقیق مفاهیم و انجام تمرین‌های متناسب با اصول یادگیری و تکرار آن است. در این راستا، داشتن منبع مناسب برای یادگیری و درک بیش‌تر و همچنین نمونه سؤالات مناسب و متنوع برای تمرین، می‌تواند یکی از عوامل مهم موفقیت در یادگیری و پیشرفت علمی دانش‌آموزان باشد.

کتابی که در دستان گرانقدر شما قرار دارد، بر مبنای نیازها و حل مشکلات دانش‌آموزان در درس ریاضی و در جهت ارائه‌ی روش‌های نوین آموزش مفاهیم ریاضی به‌صورت عمیق، کاملاً مفهومی و جامع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته و براساس نظام آموزشی کانون ریاضیدانان زمان و در جهت تکمیل کتاب‌های زنجیروار آن (تابستانه ← جامع) که متناسب با مفاهیم و مطالب کتاب درسی ریاضی (۱) پایه دهم دوره دوم متوسطه (رشته‌های ریاضی و فیزیک – علوم تجربی) است، به شرح زیر گردآوری شده است:

- ❋ تدریس از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته به‌صورت جامع و گسترده همراه با تشریح کامل مطالب
- ❋ حل برخی تمرین‌های کتاب درسی ریاضی (۱) پایه دهم
- ❋ ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی
- ❋ ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب
- ❋ تمرین‌های پایان هر فصل

دپارتمان متوسطه دوم

فهرست مطالب

سیمای فصل اول

- مجموعه، الگو و دنباله
  - مجموعه‌های اعداد
  - بازه‌ها
    - بازه‌ی بسته
    - بازه‌ی باز
    - نیم‌باز
  - مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
  - مجموعه‌ی مرجع
  - متمم یک مجموعه
  - دو مجموعه‌ی جدا از هم
  - تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه
  - الگو
    - مفهوم الگو
    - الگوهای خطی
    - الگوهای غیرخطی
  - دنباله
    - تعریف دنباله
    - دنباله‌ی حسابی
    - دنباله‌ی هندسی
  - تمرین‌های فصل اول

مجموعه‌های اعداد:

در سال گذشته با مجموعه‌های اعداد آشنا شدیم که در زیر به‌صورت خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم:

$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$: مجموعه‌ی عددهای طبیعی

$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$: مجموعه‌ی عددهای حسابی

$\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$: مجموعه عددهای صحیح

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \middle| m,n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\neq ۰\right\}$: مجموعه عددهای گویا

$\mathbb{Q}'=$ مجموعه‌ی عددهایی که نتوان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. : مجموعه‌ی عددهای گنگ

نکته ۱: همواره داریم:

$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$$

نکته ۲: همواره داریم:

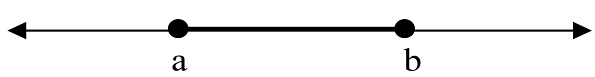
$$\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$$
$$\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$$
$$\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{...,-۳,-۲,-۱\}$$

بازه‌ها:

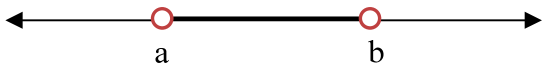
تعریف زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ را که شامل تمام عددهای حقیقیِ بین دو عدد مشخص هستند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامند.

برای نمایش مجموعه‌ی نقاط روی محور عددهای حقیقی، از نماد بازه (فاصله) استفاده می‌کنیم. در این صورت سه حالت مختلف به‌وجود می‌آید:

الف) بازه‌ی بسته: مجموعه‌ی نقاط روی محور عددهای حقیقی از a تا b را در صورتی که خود نقاط a و b نیز متعلق به فاصله‌ی موردنظر باشند، به‌صورت $\{x\in\mathbb{R} | a\leq x\leq b\}$ یا به اختصار به‌صورت $[a,b]$ نمایش می‌دهند که آن را **بازه‌ی بسته‌ی از a تا b** می‌نامند. نمایش این بازه روی محور عددهای حقیقی به‌صورت زیر است:

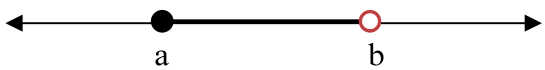


ب) بازه‌ی باز: مجموعه‌ی نقاط روی محور عددهای حقیقی بین a و b را به‌صورت $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ یا به اختصار به‌صورت (a,b) نمایش می‌دهند که آن را **بازه‌ی باز بین** a و b می‌نامند. نمایش این بازه روی محور عددهای حقیقی به‌صورت زیر است:



ج) نیم‌باز: مجموعه‌ی نقاط روی محور عددهای حقیقی از a تا b را در صورتی که فقط نقطه‌ی a متعلق به فاصله‌ی موردنظر باشد، به‌صورت $\{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$ یا به اختصار به‌صورت $[a,b)$ نمایش می‌دهند و در صورتی‌که فقط نقطه‌ی b متعلق به فاصله‌ی موردنظر باشد، به‌صورت $\{x | x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$ یا به اختصار به‌صورت $(a,b]$ نمایش می‌دهند. $[\mathbf{a,b})$ را **نیم‌باز از راست** و $(\mathbf{a,b}]$ را **نیم‌باز از چپ** می‌نامند. نمایش این نیم‌بازها روی محور عددهای حقیقی به‌صورت زیر است:

$[a,b)$



$(a,b]$

نکته ۳: مجموعه‌ی عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ را به‌صورت $(-\infty,+\infty)$ نیز نمایش می‌دهند. باید توجه داشته باشیم که ∞ عدد نیست، بلکه برای نمایش بی‌نهایت کوچک از $-\infty$ و برای نمایش بی‌نهایت بزرگ از $+\infty$ استفاده می‌کنند.

نکته ۴: بازه‌های $(a,+\infty)$ و $[a,+\infty)$ از سمت راست نامحدود می‌باشند و بازه‌های $(-\infty,b)$ و $(-\infty,b]$ از سمت چپ نامحدود می‌باشند.

مثال ۱: هریک از مجموعه‌های زیر را روی محور عددهای حقیقی نمایش دهید و به‌صورت بازه بنویسید.

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > -۲\}$

ب) $B = \{x \in \mathbb{R} | -۱ \le x \le ۳\}$

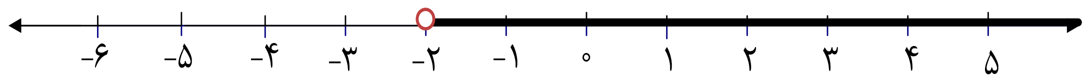
ج) $C = \{x \in \mathbb{R} | x \le ۴/۵\}$

د) $D = \{x \in \mathbb{R} | -۵ < x < ۱\}$

ه) $E = \{x \in \mathbb{R} | -۱ \le x < ۲\}$

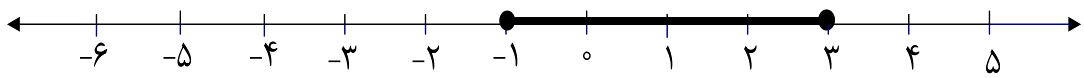
جواب

الف)



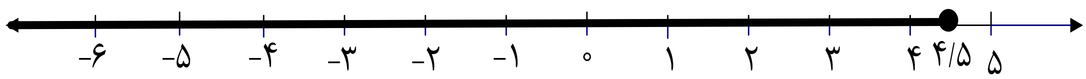
$A=(-۲,+\infty)$

ب)



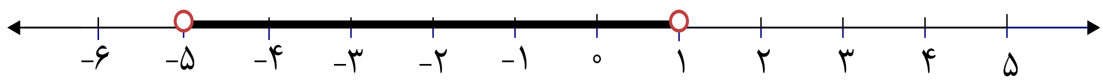
$B=[-۱,۳]$

ج)



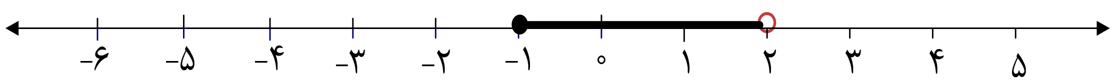
$C=(-\infty,۴/۵]$

د)



$D=(-۵,۱)$

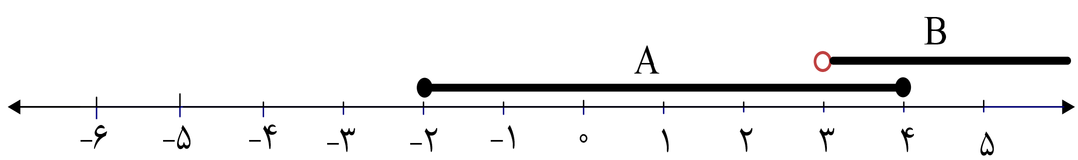
ه)



$E=[-۱,۲)$

مثال ۲: اجتماع و اشتراک دو بازه‌ی $A=(-۲,۴]$ و $B=(۳,+\infty)$ را به‌دست آورید.

جواب برای به‌دست آوردن اجتماع و اشتراک دو بازه‌ی داده شده، می‌توانیم ابتدا آن‌ها را روی یک محور به‌صورت زیر مشخص کنیم، سپس با توجه به بازه‌های رسم شده، اجتماع و اشتراک آن‌ها را تعیین کنیم.



با توجه به محور داریم:

$$A\cup B=(-۲,۴]\cup(۳,+\infty)=(-۲,+\infty)$$

$$A\cap B=(-۲,۴]\cap(۳,+\infty)=(۳,۴]$$

مثال ۳: حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

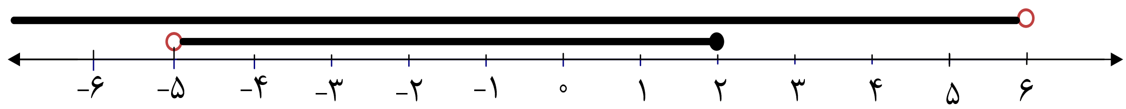
الف) $[-۵,۲]\cup(-\infty,۶)$

ب) $(۱,۴)\cap[-۳,۳)$

ج) $(-\infty,۵)-(-۱,۷]$

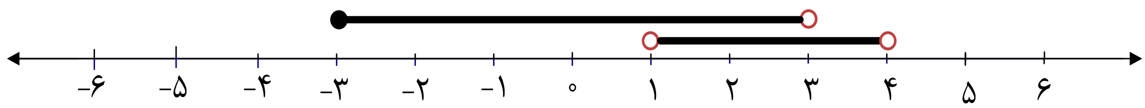
جواب

الف)



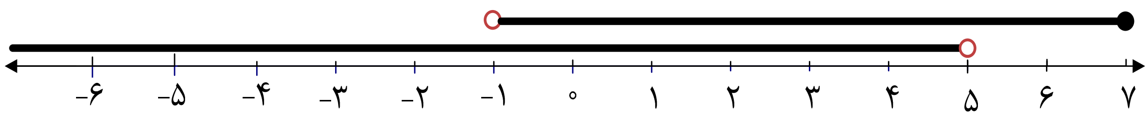
$[-۵,۲]\cup(-\infty,۶)=(-\infty,۶)$

ب)



$(۱,۴)\cap[-۳,۳)=(۱,۳)$

ج)



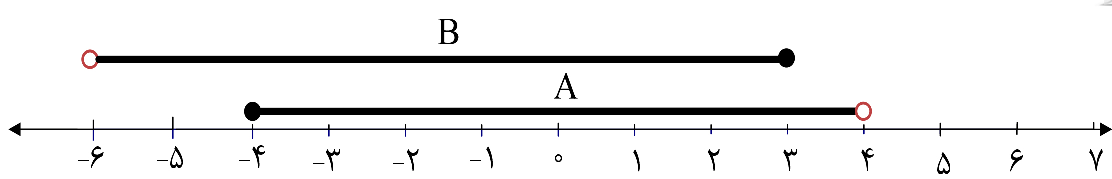
$(-\infty,۵)-(-۱,۷]=(-\infty,-۱]$

مثال ۴: نمایش هندسی دو بازه‌ی $A=(-۶,۳]$ و $B=[-۴,۴)$ را روی یک محور نشان دهید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $A\cap B$ ب) $A\cup B$

ج) $A-B$ د) $B-A$

جواب

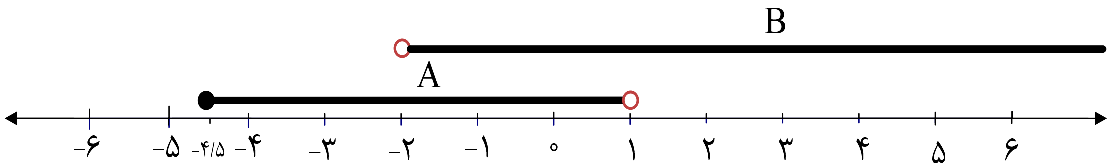


الف) $A\cap B=[-۴,۳]$ ب) $A\cup B=(-۶,۴)$

ج) $A-B=(۳,۴)$ د) $B-A=(-۶,-۴)$

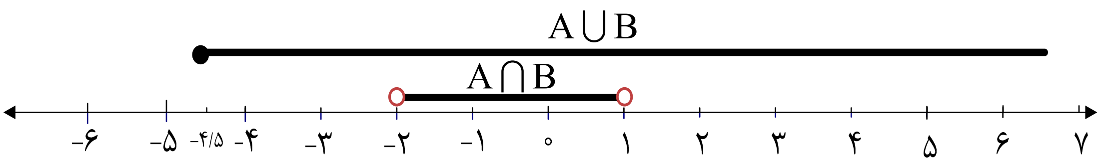
مثال ۵: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۴/۵\le x<۱\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>-۲\}$، هریک از مجموعه‌های A و B را به‌صورت بازه نوشته و حاصل مجموعه‌های $A\cap B$ و $A\cup B$ را نیز به‌صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نمایش دهید.

جواب



$A=[-۴/۵,۱)$, $B=(-۲,+\infty)$

$A\cap B=(-۲,۱)$, $A\cup B=[-۴/۵,+\infty)$



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

تعریف مجموعه‌هایی را که تعداد عضوهای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامند. مانند:

$A=\{-۲,۱,۵,۸\}\rightarrow$ ۴ عضو دارد.

$B=\left\{۰/۳,۴,\frac{۶}{۱۱}\right\}\rightarrow$ ۳ عضو دارد.

$C=\{\ \}\rightarrow$ صفر عضو دارد.

تعریف مجموعه‌هایی را که تعداد عضوهای آن‌ها از هر عددی که درنظر بگیریم بزرگ‌تر است (بی‌شمار عضو دارند)، مجموعه‌های نامتناهی می‌نامند. مانند:

$D=\{۳,۶,۹,۱۲,\ldots\}$

$E=\{\ldots,-۴,-۳,-۲\}$

$F=\left\{\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\ldots\right\}$

مثال ۶: دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه‌ی دیگری باشد.

جواب

$$A=\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,...\}$$
$$\Rightarrow A\subseteq \mathbb{N}$$
$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$$

مثال ۷: متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. درباره‌ی مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تعداد تقریبی عضوهای هریک از آن‌ها را بنویسید.

الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج

ب) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۵

ج) مجموعه‌ی عددهای طبیعی نُه رقمی

د) مجموعه‌ی تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات

ه) مجموعه‌ی عددهای اول دو رقمی

و) مجموعه عددهای گویای بین بازه‌ی $(۰,۱)$

جواب

الف) نامتناهی است. $\{۲,۴,۶,...\}$

الف) نامتناهی است. $\{۵,۱۰,۱۵,...\}$

ج) متناهی است. عددهای طبیعی نُه رقمی یعنی از ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹۹۹۹. تعداد این اعداد برابر است با:

$$(۹۹۹۹۹۹۹۹۹-۱۰۰۰۰۰۰۰۰)+۱=۹۰۰۰۰۰۰۰۰$$

د) نامتناهی است. به مرکز مبدأ مختصات، بی‌شمار دایره می‌توان رسم کرد.

ه) متناهی است. عددهای اول دو رقمی عبارتند از:

$$۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۷,۴۱,۴۳,۴۷,۵۳,۵۹,۶۱,۶۷,۷۱,۷۳,۷۹,۸۳,۸۹,۹۷$$

تعداد این اعداد برابر با ۲۰ است.

و) نامتناهی است. زیرا بین بازه‌ی $(۰,۱)$ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

مثال ۸: فرض کنید M مجموعه‌ی تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۴ باشد.

الف) M را با نمایش عضوهای آن بنویسید.

ب) M متناهی است یا نامتناهی؟

ج) یک زیرمجموعه‌ی متناهی از M بنویسید.

د) دو زیرمجموعه مانند A و B مثال بزنید به‌طوری که $A \subseteq B$.

جواب

الف) $M = \{۴,۸,۱۲,۱۶,...\}$

ب) M نامتناهی است.

ج) $E = \{۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰\}$

د)
$$\begin{matrix} A = \{۱,۲,۵,۹,۱۰,۱۱\} \\ B = \{۱,۲,۳,...,۱۵\} \end{matrix} \Rightarrow A \subseteq B$$

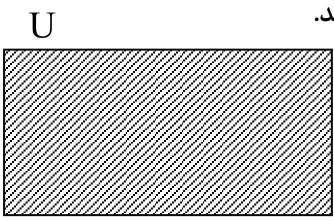
مثال ۹: اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

جواب مجموعه‌ی A باید حتماً متناهی باشد. چون یک مجموعه‌ی نامتناهی نمی‌تواند زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی باشد.

مجموعه‌ی مرجع:

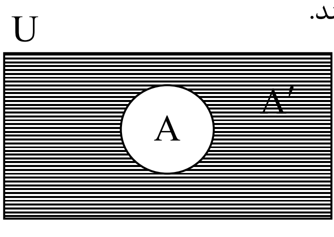
تعریف در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعه‌ی آن باشند، مجموعه‌ی مرجع می‌نامند و آن را با U یا M نمایش می‌دهند.

تذکر **مجموعه‌ی مرجع را با نمودار وِن، معمولاً به‌صورت یک مستطیل نمایش می‌دهند.**



متمم یک مجموعه:

تعریف هرگاه U مجموعه‌ی مرجع باشد و $A \subseteq U$، آن‌گاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم A می‌نامند و آن را با نماد A' نشان می‌دهند. به‌عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.



مثال ۱۰: الف) دو مجموعه‌ی زیر را درنظر بگیرید و عضوهای هریک را روی محور نشان دهید.

$$A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-۴\le x<۳\}$$

$$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۴\le x<۳\}$$

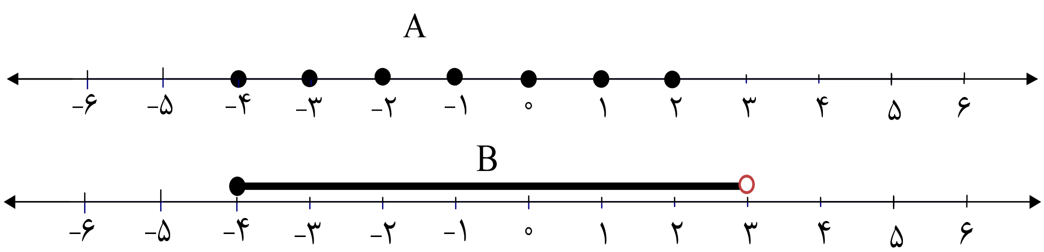
ب) A را با نمایش عضوها و B را به‌صورت بازه بنویسید.

ج) در مورد A ، اگر مجموعه‌ی مرجع را $\mathbb{Z}$ درنظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

د) در مورد B، اگر مجموعه‌ی مرجع را $\mathbb{R}$ درنظر بگیریم، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نشان دهید.

جواب

الف)



ب)

$$A=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

$$B=[-۴,۳)$$

ج)

$$A'=\mathbb{Z}-A=\{\dots,-۶,-۵,۳,۴,۵,\dots\}$$

د)

$$B'=\mathbb{R}-B=(-\infty,-۴)\cup[۳,+\infty)$$

نکته ۵: اگر A یک مجموعه‌ی دلخواه و U مجموعه‌ی مرجع باشد، در این‌صورت داریم:

$$A\cap A'=\Phi$$

نکته ۶: متممِ متممِ هر مجموعه، با خود آن مجموعه برابر است. یعنی:

$$(A')'=A$$

نکته ۷: همواره داریم:

$$U' = \varnothing$$
$$\varnothing' = U$$

نکته ۸: همواره داریم:

$$A - A' = A$$
$$A' - A = A'$$

نکته ۹: اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $B' \subseteq A'$.

نکته ۱۰: متمم‌های دو مجموعه‌ی مساوی، با هم مساوی‌اند.

مثال ۱۱: اگر $M = \{۱,۲,۳,...,۳۰\}$ مجموعه‌ی مرجع و A مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۴ باشد، A' را با عضوها نمایش دهید.

$$A = \{۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰,۲۴,۲۸\}$$
$$A' = \{۱,۲,۳,۵,۶,۷,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵,۱۷,۱۸,۱۹,۲۱,۲۲,۲۳,۲۵,۲۶,۲۷,۲۹,۳۰\}$$

نکته ۱۱: اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، آن‌گاه:

$$A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$$

$$\left.\begin{aligned} (A \cap B)' &= A' \cup B' \\ (A \cup B)' &= A' \cap B' \end{aligned}\right\} \text{قوانین دمورگان}$$

مثال ۱۲: فرض کنیم $U=\{۱,۲,...,۱۰\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۲,۳,۷\}$ و $C=\{۱,۵,۶\}$. مجموعه‌های $A\cap B$ ، $A\cup C$ ، $(A\cap B)'$، $A'\cup B'$ ، $C'\cap A$، $A-B$ و $A-(B\cap C')$ را مشخص کنید.

جواب

$$A'=\{۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$$
$$B'=\{۱,۴,۵,۶,۸,۹,۱۰\}$$
$$C'=\{۲,۳,۴,۷,۸,۹,۱۰\}$$
$$A\cap B=\{۱,۲,۳,۴\}\cap\{۲,۳,۷\}=\{۲,۳\}$$
$$A\cup C=\{۱,۲,۳,۴\}\cup\{۱,۵,۶\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$
$$(A\cap B)'=\{۲,۳\}'=\{۱,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$$
$$A'\cup B'=\{۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}\cup\{۱,۴,۵,۶,۸,۹,۱۰\}=\{۱,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$$
$$C'\cap A=\{۲,۳,۴,۷,۸,۹,۱۰\}\cap\{۱,۲,۳,۴\}=\{۲,۳,۴\}$$
$$A-B=\{۱,۲,۳,۴\}-\{۲,۳,۷\}=\{۱,۴\}$$
$$A-(B\cap C')=\{۱,۲,۳,۴\}-(\{۲,۳,۷\}\cap\{۲,۳,۴,۷,۸,۹,۱۰\})=\{۱,۲,۳,۴\}-\{۲,۳,۷\}=\{۱,۴\}$$

دو مجموعه‌ی جدا از هم:

تعریف به دو مجموعه‌ی ناتهی مثل A و B که عضو مشترکی نداشته باشند، دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا) می‌گویند. یعنی:

$A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $A\cap B=\varnothing \Rightarrow$ A و B جدا از هم هستند.

مثال ۱۳: آیا دو مجموعه‌ی $A=\{۱,۵,۸\}$ و $B=\{-۲,۳\}$ جدا از هم هستند؟

جواب بله. زیرا: $A\cap B=\varnothing$.

مثال ۱۴: سه مجموعه‌ی A، B و C مثال بزنید که A و B جدا از هم، B و C جدا از هم و A و C نیز جدا از هم باشند.

جواب

$A=\{۲,۹\}$, $B=\{۴,۵\}$, $C=\{۷,۱۲\}$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه:

در سال گذشته بیان کردیم که اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد، آن‌گاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال:

$$A=\{۴,۶,۹,۱۱,۱۶\}\Rightarrow n(A)=۵$$

اکنون می‌خواهیم تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه را تعیین کنیم.

برای به‌دست آوردن تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی A و B، دو حالت وجود دارد:

الف) اگر $A\cap B=\varnothing$: در این‌صورت، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی A و B از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

ب) اگر $A\cap B\neq\varnothing$: در این‌صورت، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی A و B از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

مثال ۱۵: الف) مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۳۶ و ۴۲ را بنویسید و آن‌ها را به‌ترتیب A و B بنامید.

ب) مجموعه شمارنده‌های مشترک دو عدد ۳۶ و ۴۲ را بنویسید.

ج) مقدار $n(A\cup B)$ را تعیین کنید.

جواب

الف)

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸,۳۶\}\Rightarrow n(A)=۹$$
$$B=\{۱,۲,۳,۶,۷,۲۱,۴۲\}\Rightarrow n(B)=۷$$

ب)

$$A\cap B=\{۱,۲,۳,۶\}\Rightarrow n(A\cap B)=۴$$

ج)

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۹+۷-۴=۱۲$$

مثال ۱۶: در یک کلاس ۳۲ نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامه‌های ورزشی و ۲۳ نفر در فوق برنامه‌های علمی شرکت کرده‌اند. اگر ۲ نفر در هیچ‌یک از دو فوق برنامه‌ی ورزشی و علمی شرکت نکنند، تعیین کنید چند نفر:

الف) در هر دو فوق برنامه شرکت می‌کنند.

ب) فقط در یک فوق برنامه شرکت می‌کنند.

جواب ازآنجاکه تعداد دانش‌آموزان کلاس ۳۲ نفر می‌باشد و ۲ نفر در هیچ‌یک از دو فوق برنامه‌ی ورزشی و علمی شرکت نمی‌کنند، لذا تعداد $۳۰ = ۲ - ۳۲$ نفر حداقل در یکی از فوق برنامه‌ها شرکت می‌کنند. اکنون داریم:

الف)

روش اول: با استفاده از دستور محاسبه‌ی تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

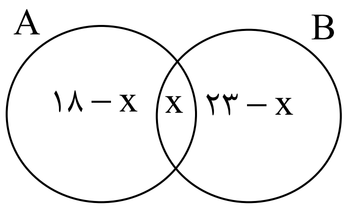
A و B را به ترتیب مجموعه‌ی دانش‌آموزانی که در فوق برنامه‌های ورزشی و علمی شرکت می‌کنند، می‌نامیم. در این‌صورت داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۳۰=۱۸+۲۳-n(A\cap B)\Rightarrow$$
$$۳۰=۴۱-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۱۱$$

۱۱ نفر در هر فوق برنامه شرکت می‌کنند.

روش دوم: با استفاده از نمودار وِن

تعداد دانش‌آموزانی که در هر دو فوق برنامه شرکت می‌کنند را x درنظر می‌گیریم. اکنون



$$۱۸\cancel{-x}\ \cancel{+x}+۲۳-x=۳۰\Rightarrow ۴۱-x=۳۰\Rightarrow x=۱۱$$

۱۱ نفر در هر فوق برنامه شرکت می‌کنند.

ب)

تعداد نفراتی که فقط در فوق برنامه‌ی ورزشی شرکت می‌کنند. $۱۸-x=۱۸-۱۱=۷$

تعداد نفراتی که فقط در فوق برنامه‌ی علمی شرکت می‌کنند. $۲۳-x=۲۳-۱۱=۱۲$

مثال ۱۷: اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-۲\le x\le ۲\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,(x+۳)(x-۱)=۰\}$، مطلوب است محاسبه‌ی $n(A\cup B)$.

جواب

$$A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-۲\le x\le ۲\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}\Rightarrow n(A)=۵$$

$$B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\underbrace{(x+۳)(x-۱)=۰}_{\Downarrow}\right\}=\{-۳,۱\}\Rightarrow n(B)=۲$$

$$\begin{cases}x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

$$A\cap B=\{۱\}\Rightarrow n(A\cap B)=۱$$
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۵+۲-۱=۶$$

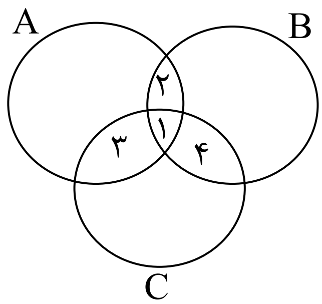
مثال ۱۸: در یک جمع ۲۴ نفری، ۸ نفر به چای، ۱۳ نفر به قهوه و ۱۱ نفر به نوشابه علاقه‌مند هستند. اگر بدانیم ۳ نفر به چای و قهوه، ۴ نفر به چای و نوشابه و ۵ نفر به قهوه و نوشابه و ۱ نفر به هر سه نوشیدنی علاقه‌مند است و همچنین در این جمع، کسی نیست که به هیچ‌یک از این سه نوشیدنی علاقه‌مند نباشد، در این صورت:

الف) چند نفر فقط به قهوه علاقه‌مند هستند؟

ب) چند نفر حداقل به یکی از دو نوع نوشابه و قهوه علاقه‌مند هستند؟

جواب

الف) A، B و C را به ترتیب مجموعه‌ی افرادی که به چای، قهوه و نوشابه علاقه‌مند هستند، درنظر می‌گیریم. با توجه به نمودار وِن رسم شده داریم:



$$۱۳-(۲+۱+۴)=۱۳-۷=۶$$

۶ نفر فقط به قهوه علاقه‌مند هستند.

ب)
$$۱۳+۱۱-(۱+۴)=۲۴-۵=۱۹$$

مثال ۱۹: فرض می‌کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند، به طوری‌که $n(U)=۲۰۰$، $n(A)=۱۲۰$، $n(B)=۸۰$ و $n(A\cap B)=۴۰$. مطلوب است تعیین:

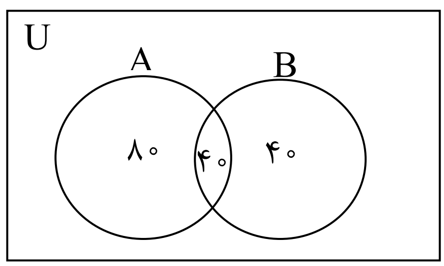
الف) $n(A\cup B)$

ب) $n(A\cap B')$

ج) $n(A'\cap B)$

د) $n(A'\cap B')$

جواب



با توجه به نمودار وِن رسم شده داریم:

$$n(A')=۸۰\quad,\quad n(B')=۴۰$$

الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۲۰+۸۰-۴۰=۱۶۰$

ب) $A\cap B'=A-B\Rightarrow n(A\cap B')=n(A-B)=۸۰$

ج) $A'\cap B=B\cap A'=B-A\Rightarrow n(A'\cap B)=n(B-A)=۴۰$

د) $A'\cap B'=(A\cup B)'\Rightarrow n(A\cup B')=n(U)-n(A\cup B)=۲۰۰-۱۶۰=۴۰$

الگو:

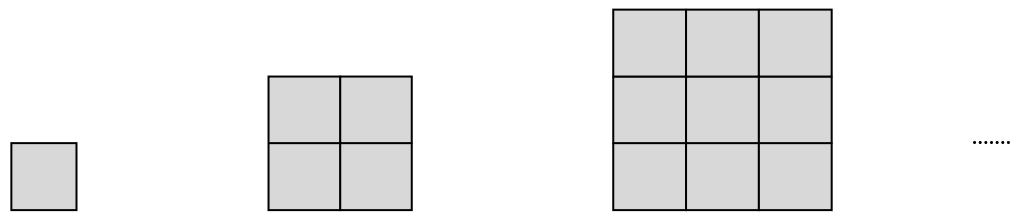
مفهوم الگو:

در اطراف ما بسیاری از پدیده‌های طبیعی از روند خاصی پیروی می‌کنند و شکل خاصی دارند. با بررسی بعضی از نمونه‌ها می‌توان روند گسترش آن‌ها را بررسی نمود. این روند را یک الگو می‌نامند. در این‌گونه مسائل یک ارتباط منطقی و مستدل بین اعضای مسئله وجود دارد.

این‌گونه مسائل می‌توانند به شکل دسته‌ای از اعداد، عبارات، اشکال و ... باشند. برای حل این نوع مسائل باید رابطه‌ی بین اجزای الگو شناخته شود؛ طوری‌که این رابطه به سایر اجزای الگو نیز سرایت کند.

برای پیدا کردن رابطه‌ی بین اجزای الگو، نیاز به نگاه دقیق و آگاهانه است که توجه به این موضوع برای حل بسیاری مسائل و رابطه‌های ریاضی لازم است. در مثال زیر، این مطلب را به‌طور کامل توضیح می‌دهیم:

مثال ۲۰: با توجه به تغییرات شکل‌های زیر در هر مرحله:



(۱) (۲) (۳)

الف) جدولی تشکیل دهید که با استفاده از آن بتوان تعداد مربع‌های کوچک را تا شکل nام پیدا کرد.

جواب

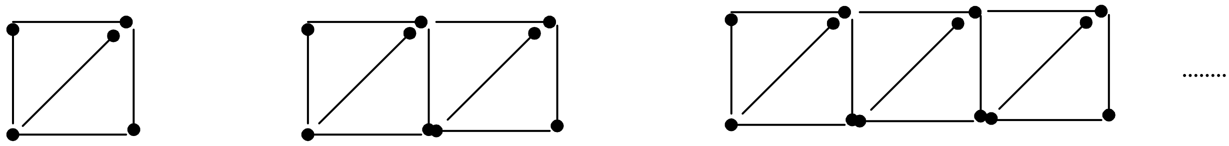
n: شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
a_n: تعداد مربع‌ها	۱	۴	۹	۱۶	...	$n^۲$
رابطه‌ی بین n و a_n	$a_۱=۱$	$a_۲=۴$	$a_۳=۹$	$a_۴=۱۶$	...	$a_n=n^۲$

در این جدول، عبارت‌های $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... و a_n را متغیرهای اندیس‌دار می‌گویند که مقدارهای آن‌ها به ترتیب ۱، ۴، ۹، ... و $n^۲$ است. به این اعداد، جملات الگو نیز گفته می‌شود.

جمله‌ی nام		جمله‌ی چهارم	جمله‌ی سوم	جمله‌ی دوم	جمله‌ی اول
a_n		$a_۴$	$a_۳$	$a_۲$	$a_۱$
$\boxed{n^۲}$	.....	$\boxed{۱۶}$	$\boxed{۹}$	$\boxed{۴}$	$\boxed{۱}$

در این مثال، a_n بیانگر تعداد مربع‌های شکل nام است. $a_n = n^{۲}$ را جمله‌ی عمومی الگو می‌نامند؛ زیرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله‌ی عمومی یک الگو، به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است.

مثال ۲۱: با توجه به شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌ها را در شکل nام تعیین کنید. با توجه به الگوی به‌دست آمده، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل صدم را به‌دست آورید.



(۱) (۲) (۳)

جواب تعداد چوب‌کبریت‌ها در هریک از شکل‌ها به‌صورت زیر است:

$$a_{۱} = ۵ \xrightarrow{+۴} a_{۲} = ۹ \xrightarrow{+۴} a_{۳} = ۱۳ \quad , \quad \ldots$$

این اعداد را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$a_{۱} = ۴(۱)+۱ \quad , \quad a_{۲} = ۴(۲)+۱ \quad , \quad a_{۳} = ۴(۳)+۱ \quad , \quad \ldots.$$

رابطه‌ی بین شماره‌ی شکل و تعداد چوب‌کبریت‌ها به‌صورت زیر است:

۱+ شماره‌ی شکل × ۴= تعداد چوب‌کبریت‌ها

بنابراین تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل nاُم برابر است با:

$$a_n = ۴n + ۱$$

اکنون تعداد چوب‌کبریت‌ها را در شکل صدم به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۰۰} = ۴(۱۰۰)+۱ = ۴۰۰+۱ = ۴۰۱$$

الگوهای خطی:

مفهوم الگوی خطی:

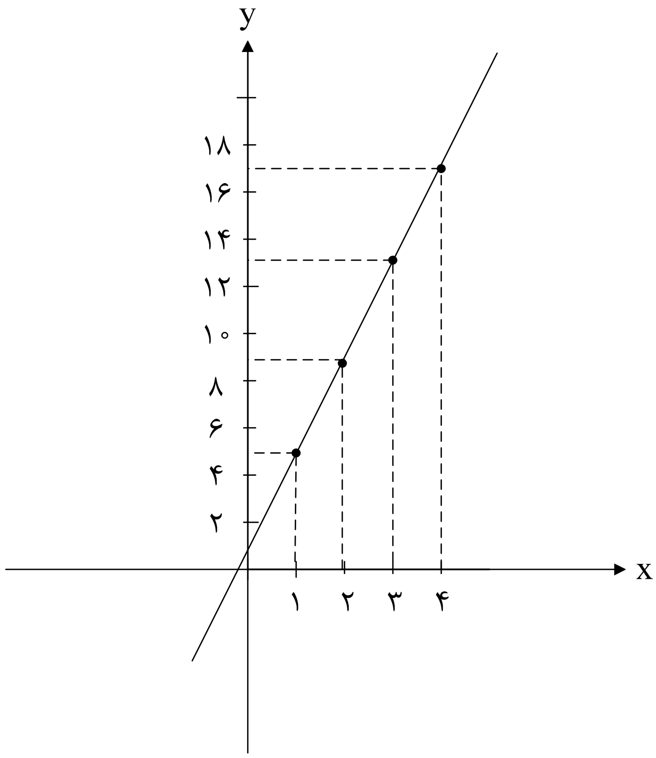
در مثال (۲۱) مشاهده کردیم که هر جمله دقیقاً ۴ واحد بیش‌تر از جمله‌ی قبل از خودش است. یعنی:

$$\overset{a_{۱}}{\boxed{۵}} \xrightarrow{+۴} \overset{a_{۲}}{\boxed{۹}} \xrightarrow{+۴} \overset{a_{۳}}{\boxed{۱۳}} \xrightarrow{+۴} \overset{a_{۴}}{\boxed{۱۷}} \quad \boxed{\ldots}$$

چنین الگوهایی را که در آن‌ها اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای یافتن دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول زیر را درنظر می‌گیریم:

n	a_n	(n,a_n)
۱	۵	$(۱,۵)$
۲	۹	$(۲,۹)$
۳	۱۳	$(۳,۱۳)$
۴	۱۷	$(۴,۱۷)$
⋮	⋮	⋮

اگر این نقاط را در صفحه‌ی مختصات مشخص کنیم، همگی آن‌ها روی خط $y = ۴x + ۱$ قرار می‌گیرند. به‌عبارت دیگر، مختصات تمام این نقاط در معادله‌ی خط بیان شده صدق می‌کنند.



شباهت بین معادله‌ی خط $y = ۴x + ۱$ و جمله‌ی عمومی الگو یعنی $a_n = ۴n + ۱$ اتفاقی نیست. عدد ۴ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو می‌باشد، در معادله‌ی خط به‌عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.

تعریف به‌طور کلی الگوهایی را که جمله‌ی عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b عددهای حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

تذکر **در جمله‌ی عمومی $t_n = an + b$، میزان تغییرات جملات متوالی برابر a است. به‌عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله‌ای متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n است.**

مثال ۲۲: در یک الگوی خطی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۲۳- و ۵۸- می‌باشند. جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

جواب می‌دانیم: $t_n = an + b$. پس:

$$t_۵ = -۲۳ \Rightarrow a(۵) + b = -۲۳ \Rightarrow ۵a + b = -۲۳ \qquad (۱)$$

$$t_{۱۲} = -۵۸ \Rightarrow a(۱۲) + b = -۵۸ \Rightarrow ۱۲a + b = -۵۸ \qquad (۲)$$

اکنون با حل دستگاه حاصل از دو معادله‌ی (۱) و (۲)، مقدارهای a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۵a + b = -۲۳ \\ ۱۲a + b = -۵۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۵a - \cancel{b} = ۲۳ \\ ۱۲a + \cancel{b} = -۵۸ \end{cases}$$

$$۷a = -۳۵ \Rightarrow a = -۵ \quad (*)$$

$$۵a + b = -۲۳ \xrightarrow{(*)} ۵(-۵) + b = -۲۳ \Rightarrow -۲۵ + b = -۲۳ \Rightarrow b = ۲$$

با قرار دادن مقدارهای a و b در $t_n = an + b$، جمله‌ی عمومی الگو به‌دست می‌آید. بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله برابر است با:

$$t_n = -۵n + ۲$$

جملات الگو به‌صورت زیر خواهند بود:

$$-۳, -۸, -۱۳, -۱۸, \underset{t_۵}{\underbrace{-۲۳}}, -۲۸, -۳۳, -۳۸, -۴۳, -۴۸, -۵۳, \underset{t_{۱۲}}{\underbrace{-۵۸}}, \ldots$$

مثال ۲۳: ابتدا سه جمله‌ی بعدی هریک از الگوهای زیر را پیدا کنید؛ سپس جمله‌ی nاُم آن را بنویسید.

الف) $۲, ۷, ۱۲, ۱۷, \ldots$

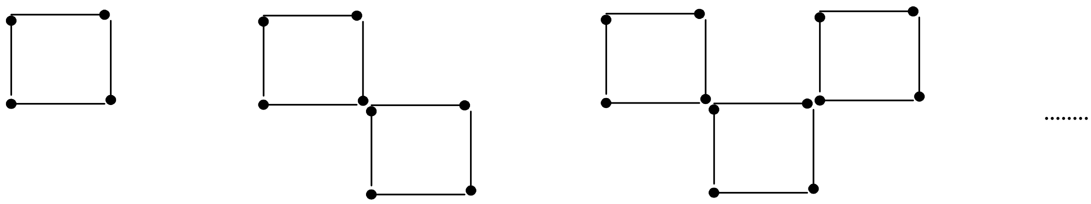
ب) $\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱, ۱\frac{۱}{۴}, ۱\frac{۱}{۲}, \ldots$

جواب

الف) $۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, \ldots, ۵n - ۳, \ldots$

ب) $\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱, ۱\frac{۱}{۴}, ۱\frac{۱}{۲}, ۱\frac{۳}{۴}, ۲, ۲\frac{۱}{۴}, \ldots, \frac{۱}{۴}n, \ldots$

مثال ۲۴: با استفاده از چوب‌کبریت، سه شکل زیر ساخته شده است. تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در شکل nام چند تا است؟

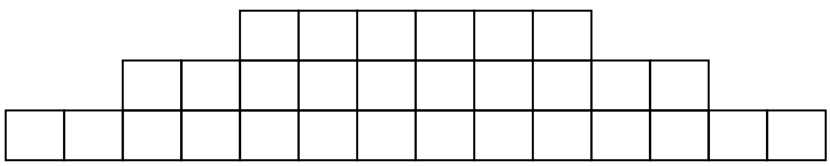


(۱) (۲) (۳)

جواب الگوی عددی مربوط به تعداد چوب‌کبریت‌ها در هریک از شکل‌ها به‌صورت زیر است:

$۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰,...,۴n,...$

مثال ۲۵: شکل زیر، سه ردیف از صندلی‌های یک سالن تئاتر را نشان می‌دهد. اگر تعداد صندلی‌های ردیف‌های بعدی از الگوی افزایش صندلی‌های این سه ردیف پیروی کنند، تعداد صندلی‌ها را تا ردیف هفتم به‌دست آورید. جمله‌ی عمومی الگوی به‌دست آمده را نیز حدس بزنید. آیا این الگو، خطی است؟



جواب تعداد صندلی‌ها تا ردیف هفتم به‌صورت یک الگوی عددی در زیر نشان داده شده است:

$۶,۱۰,۱۴,۱۸,۲۲,۲۶,۳۰$

جمله‌ی عمومی الگو برابر است با: $a_n = ۴n + ۲$. این الگو، خطی است. زیرا اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن، مقدار ثابتی است. (برابر با ۴ است.)

الگوهای غیرخطی:

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲۶: اگر یک مستطیل کاغذی را در هر مرحله با تا زدن نصف کنیم، تعداد مستطیل‌های به‌دست آمده در هر مرحله را به‌صورت یک الگو بنویسید. جمله‌ی عمومی این الگو را بنویسید. (اولین مرحله با اولین تا زدن آغاز می‌شود). آیا این الگو خطی است؟

جواب

n: شماره‌ی مرحله	۱	۲	۳	۴	....	n
t_n: تعداد مستطیل‌ها	۲	۴	۸	۱۶	....	۲^n
رابطه‌ی بین n و t_n	$t_{۱}=۲^{۱}$	$t_{۲}=۲^{۲}$	$t_{۳}=۲^{۳}$	$t_{۴}=۲^{۴}$	....	$t_n=۲^n$

جملات این الگو را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

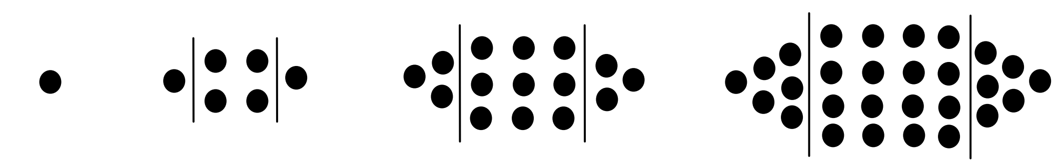
$۱,۴,۸,۱۶,...$

این الگو، خطی نیست. زیرا اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن، مقدار ثابتی نیست.

تعریف الگویی که در مثال ۲۶ مشاهده کردیم، الگوی غیرخطی نامیده می‌شود.

مثال ۲۷: الگوی زیر را درنظر بگیرید.

شکل (۴) شکل (۳) شکل (۲) شکل (۱)



۲۸ نقطه ۱۵ نقطه ۶ نقطه ۱ نقطه

الف) تعداد دایره‌های هر مرحله را به‌صورت یک الگو تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.

ب) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

ج) شکل دهم در این الگو چند دایره دارد؟

جواب

الف) تعداد دایره‌های هر مرحله به‌صورت یک الگو برابر است با:

$۱,۶,۱۵,۲۸,۴۵,۶۶,...$

ب) هریک از جملات این الگو را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$a_{۱}=۱^{۲}+(۱-۱)\times ۱=۱+۰=۱$$

$$a_{۲}=۲^{۲}+(۲-۱)\times ۲=۴+۲=۶$$

$$a_{۳}=۳^{۲}+(۳-۱)\times ۳=۹+۶=۱۵$$

$$a_{۴}=۴^{۲}+(۴-۱)\times ۴=۱۶+۱۲=۲۸$$

$$a_5 = 5^2 + (5-1)\times 5 = 25 + 20 = 45$$

$$a_6 = 6^2 + (6-1)\times 6 = 36 + 30 = 66$$

با توجه به روابط نوشته شده در بالا، جمله‌ی عمومی این الگو برابر است با:

$$a_n = n^2 + (n-1)n \quad \text{یا} \quad a_n = 2n^2 - n$$

ج) تعداد دایره‌های شکل دهم برابر است با:

$$a_{10} = 10^2 + (10-1)\times 10 = 100 + 90 = 190$$

دنباله:

تعریف هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامند. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

تذکر **ممکن است جملات دنباله فاقد الگو باشند.**

نکته ۱۲: دنباله‌هایی مانند $t_n = n^2 - 3n$، دنباله‌ی درجه‌ی دوم نامیده می‌شوند.

مثال ۲۸: چهار جمله‌ی اول هریک از دنباله‌های زیر را که جمله‌ی عمومی آن‌ها داده شده است، بنویسید.

الف) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$

ب) $a_n = 3n^2 - \dfrac{1}{n}$

ج) $a_n = 2^n - n^2$

جواب

الف)

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{2\times 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \\ a_2 &= \frac{2\times 2}{2+1} = \frac{4}{3} \\ a_3 &= \frac{2\times 3}{3+1} = \frac{6}{4} \\ a_4 &= \frac{2\times 4}{4+1} = \frac{8}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} a_۱ = ۳\times ۱^۲ - \frac{۱}{۱} = ۳ - ۱ = ۲ \\ a_۲ = ۳\times ۲^۲ - \frac{۱}{۲} = ۱۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۲۳}{۲} \\ a_۳ = ۳\times ۳^۲ - \frac{۱}{۳} = ۲۷ - \frac{۱}{۳} = \frac{۸۰}{۳} \\ a_۴ = ۳\times ۴^۲ - \frac{۱}{۴} = ۴۸ - \frac{۱}{۴} = \frac{۱۹۱}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow ۲, \frac{۲۳}{۲}, \frac{۸۰}{۳}, \frac{۱۹۱}{۴}$$

ج)

$$\left.\begin{array}{l} a_۱ = ۲^۱ - ۱^۲ = ۲ - ۱ = ۱ \\ a_۲ = ۲^۲ - ۲^۲ = ۴ - ۴ = ۰ \\ a_۳ = ۲^۳ - ۳^۲ = ۸ - ۹ = -۱ \\ a_۴ = ۲^۴ - ۴^۲ = ۱۶ - ۱۶ = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱, ۰, -۱, ۰$$

مثال ۲۹: چهار دنباله و چهار جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جمله‌ی عمومی مربوط به کدام دنباله است؟

$\frac{۳n}{n+۲}$	$۱, \frac{۳}{۲}, \frac{۹}{۵}, \ldots$
$(-۳)^{n-۱}$	$۱, \frac{۴}{۳}, \frac{۳}{۲}, \ldots$
$n^۲ + ۵n$	$۱, -۳, ۹, \ldots$
$۲n + ۱$	$۶, ۱۴, ۲۴, \ldots$

جواب دنباله‌ها و جمله‌های عمومی که مربوط به هم هستند، در زیر نشان داده شده است. (لازم است توجه داشته باشیم که دنباله‌ی $۱, \frac{۴}{۳}, \frac{۳}{۲}, \ldots$ و جمله‌ی عمومی $۲n+۱$ هیچ ارتباطی با هم ندارند.)

$$\frac{۳n}{n+۲} \to ۱, \frac{۳}{۲}, \frac{۹}{۵}, \ldots$$

$$(-۳)^{n-۱} \to ۱, -۳, ۹, \ldots$$

$$n^۲ + ۵n \to ۶, ۱۴, ۲۴, \ldots$$

مثال ۳۰: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا $n+\frac{۱}{۲}-$ می‌تواند قانون دنباله‌ی $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۶},...$ باشد؟ دلیل خود را بیان کنید.

جواب خیر. زیرا جملات دنباله‌ی مربوط به جمله‌ی عمومی $n+\frac{۱}{۲}-$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲},\frac{۷}{۲},...$$

ولی جمله‌ی عمومی مربوط به دنباله‌ی $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۶},...$ برابر است با:

$$a_n=\frac{n}{n+۱}$$

مثال ۳۱: رضا اول هر هفته ۱۶۰۰ تومان پول توجیبی می‌گیرد و در کشوی میز خود می‌گذارد و تا آخر هر هفته نیمی از پول کشو را خرج می‌کند. اگر از قبل، پولی در کشو نباشد، رضا در پایان هفته‌ی اول چه‌قدر پول در کشو دارد؟ در پایان هفته‌ی دوم چه‌قدر پول در کشو دارد؟ در پایان هفته سوم چه‌قدر پول در کشو دارد؟ پول‌های رضا در پایان هر هفته را به‌صورت یک دنباله درنظر بگیرید و چهار جمله‌ی اول این دنباله را بنویسید. بین جمله‌ی nاُم و جمله‌ی $n+۱$اُم این دنباله چه رابطه‌ای وجود دارد؟

جواب در پایان هفته‌ی اول ۸۰۰ تومان، در پایان هفته‌ی دوم ۴۰۰ تومان و در پایان هفته‌ی سوم ۲۰۰ تومان دارد.
چهار جمله‌ی اول این دنباله به‌صورت زیر است:

$$۸۰۰,۴۰۰,۲۰۰,۱۰۰$$

رابطه‌ی بین جمله‌ی nاُم و جمله‌ی $n+۱$اُم این دنباله برابر است با:

$$a_{n+۱}=\frac{۱}{۲}a_n$$

مثال ۳۲: جمله‌ی nاُم یک دنباله به‌صورت $a_n=\frac{۵n-۲}{۳n-۵}$ می‌باشد. کدام جمله‌ی این دنباله برابر ۲ است؟

جواب

$$\frac{۵n-۲}{۳n-۵}=۲\Rightarrow ۵n-۲=۶n-۱۰\Rightarrow ۵n-۶n=-۱۰+۲\Rightarrow -n=-۸\Rightarrow n=۸$$

مثال ۳۳: در دنباله‌ی زیر که به دنباله‌ی فیبوناتچی معروف است، جمله‌ی نهم را به‌دست آورید.

$$a_{۱}=a_{۲}=۱ \quad , \quad a_n=a_{n-۲}+a_{n-۱} \quad ; \quad n \ge ۳$$

جواب

$$a_{۳}=a_{۳-۲}+a_{۳-۱}=a_{۱}+a_{۲}=۱+۱=۲$$
$$a_{۴}=a_{۴-۲}+a_{۴-۱}=a_{۲}+a_{۳}=۱+۲=۳$$
$$a_{۵}=a_{۵-۲}+a_{۵-۱}=a_{۳}+a_{۴}=۲+۳=۵$$
$$a_{۶}=a_{۶-۲}+a_{۶-۱}=a_{۴}+a_{۵}=۳+۵=۸$$
$$a_{۷}=a_{۷-۲}+a_{۷-۱}=a_{۵}+a_{۶}=۵+۸=۱۳$$
$$a_{۸}=a_{۸-۲}+a_{۸-۱}=a_{۶}+a_{۷}=۸+۱۳=۲۱$$
$$a_{۹}=a_{۹-۲}+a_{۹-۱}=a_{۷}+a_{۸}=۱۳+۲۱=۳۴$$

بنابراین دنباله‌ی فیبوناتچی به‌صورت زیر است:

$$۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,...$$

دنباله‌ی حسابی:

در صفحات قبل، با الگوهای خطی آشنا شدیم. نام دیگر این‌گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به‌عبارت دیگر:

تعریف دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (به‌جز جمله‌ی اول) با اضافه شدن مقداری ثابت به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید، دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامند.

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با t_n، قدرنسبت آن را با d و شماره‌ی جملات را با n نمایش دهیم، جملات دنباله‌ی حسابی به‌صورت زیر خواهند بود:

$t_{۱}$	$t_{۲}$	$t_{۳}$	$t_{۴}$	$t_{۵}$	...	t_n
$t_{۱}$	$t_{۱}+d$	$t_{۱}+۲d$	$t_{۱}+۳d$	$t_{۱}+۴d$	...	$t_{۱}+(n-۱)d$

$+d \quad +d \quad +d \quad +d$

جمله‌ی nاُم این دنباله $t_{۱}+(n-۱)d$ است. بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی برابر است با:

$$\mathbf{t_n=t_{۱}+(n-۱)d}$$

مثال ۳۴: یک بازیکن فوتبال در هنگام بازی صدمه می‌بیند و مجبور می‌شود زانوی پای خود را عمل کند. بعد از عمل، پزشک معالج به او پیشنهاد می‌کند در هفته‌ی اول روزی ۱۲ دقیقه بدود و هر هفته ۳ دقیقه به زمان دویدن روزانه‌ی خود اضافه کند. هنگامی‌که زمان دویدن او به ۱۳۸ دقیقه در روز برسد، می‌تواند برای تیم خود بازی کند. علی که از علاقه‌مندان این بازیکن می‌باشد، می‌خواهد بداند که این بازیکن بعد از چند هفته می‌تواند بازی کند؟ علی جدولی به‌صورت زیر تشکیل

داد تا بتواند قانون حاکم بر الگوی جدول را به‌دست آورد. او تعداد هفته‌ها را با n و زمان دویدن در هفته‌ی nاُم را با a_n نشان داده است.

هفته‌ها	۱	۲	۳	۴
زمان دویدن روزانه	$a_۱ = ۱۲$	$a_۲ = ۱۲ + ۳ = ۱۵$	$a_۳ = ۱۵ + ۳ = ۱۸$	$a_۴ = ۱۸ + ۳ = ۲۱$

الف) به علی کمک کنید تا جدول را برای ۷ هفته کامل کند.
ب) چه رابطه‌ای بین زمان دویدن در هر دو هفته‌ی متوالی وجود دارد؟
ج) جمله‌ی nاُم را برحسب جمله‌ی اول و n بنویسید.
د) با به‌دست آوردن قانون حاکم بر الگوی فوق، بگویید که این بازیکن بعد از طی چند هفته می‌تواند بازی کند؟
ه) اگر این بازیکن هر هفته ۶ دقیقه مدت زمان دویدن خود را افزایش می‌داد، بعد از طی چه مدتی می‌توانست بازی کند؟

جواب

الف)

هفته‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
زمان دویدن روزانه	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰

ب) با توجه به عددهای نوشته شده در جدول بالا درمی‌یابیم که بین زمان دویدن در هر دو هفته‌ی متوالی، اختلاف زمانی یکسان وجود دارد. یعنی اختلاف زمان دویدن روزانه در هر دو هفته‌ی متوالی برابر ۳ است.

ج) جمله‌ی nاُم برابر است با:
$$a_n = ۱۲ + (n-۱) \times ۳$$

د)
$$a_n = ۱۲ + (n-۱) \times ۳ = ۱۲ + ۳n - ۳ \Rightarrow a_n = ۳n + ۹$$

اکنون داریم:
$$۳n + ۹ = ۱۳۸ \Rightarrow ۳n = ۱۲۹ \Rightarrow n = ۴۳$$

این بازیکن بعد از طی ۴۳ هفته می‌تواند بازی کند.
ه) جمله‌ی عمومی دنباله در این حالت (با افزایش ۶ دقیقه زمان دویدن روزانه‌ی خود) برابر است با:
$$a_n = ۱۲ + (n-۱) \times ۶ = ۱۲ + ۶n - ۶ \Rightarrow a_n = ۶n + ۶$$

اکنون داریم:
$$۶n + ۶ = ۱۳۸ \Rightarrow ۶n = ۱۳۲ \Rightarrow n = ۲۲$$

این بازیکن با افزایش ۶ دقیقه زمان دویدن روزانه‌ی خود، بعد از طی ۲۲ هفته می‌توانست بازی کند.

نکته ۱۳: در دنباله‌ی حسابی، اگر قدرنسبت مثبت باشد، جملات دنباله به مقدار ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدرنسبت منفی باشد، جملات دنباله به مقدار ثابتی کاهش می‌یابند.

مثال ۳۵: در هریک از دنباله‌های حسابی زیر، ابتدا جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله‌ها را مشخص کنید، سپس جمله‌ی عمومی آن‌ها را بنویسید.

الف) $۲,۵,۸,۱۱,۱۴,...$

ب) $۱,\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲},-۱,...$

جواب

الف)

$$t_۱=۲ \quad , \quad d=۳$$

جملات این دنباله در حال افزایش هستند. جمله‌ی عمومی آن برابر است با:

$$t_n=t_۱+(n-۱)d \Rightarrow a_n=۲+(n-۱)\times ۳=۲+۳n-۳ \Rightarrow a_n=۳n-۱$$

ب)

$$t_۱=۱ \quad , \quad d=-\frac{۱}{۲}$$

جملات این دنباله در حال کاهش هستند. جمله‌ی عمومی آن برابر است با:

$$t_n=t_۱+(n-۱)d \Rightarrow t_n=۱+(n-۱)\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۱-\frac{۱}{۲}n+\frac{۱}{۲} \Rightarrow t_n=\frac{۳}{۲}-\frac{n}{۲}$$

مثال ۳۶: شیر آبی در هر دقیقه ۳/۵ لیتر آب وارد یک حوض می‌کند. اگر این حوض از ابتدا ۲۵ لیتر آب داشته باشد، مقدار آب حوض را پس از گذشت یک، دو، سه، چهار و پنج دقیقه در یک دنباله بنویسید. آیا این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی است؟ چرا؟ پس از گذشت چند دقیقه آب این حوض ۱۰۲ لیتر می‌شود؟

جواب

$$۲۵,۲۸/۵,۳۲,۳۵/۵,۳۹,۴۲/۵$$

این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی است. زیرا اختلاف بین مقدار آب حوض در دو فاصله‌ی زمانی متوالی، مقدار ثابتی است. یعنی $d=۳/۵$ قدرنسبت دنباله است.

جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت زیر است:

$$t_n=t_۱+(n-۱)d \Rightarrow t_n=۲۵+(n-۱)\times ۳/۵ \Rightarrow t_n=۳/۵n+۲۱/۵$$

اکنون داریم:

$$۳/۵n+۲۱/۵=۱۰۲ \Rightarrow ۳/۵n=۸۰/۵ \Rightarrow n=۲۳$$

بنابراین پس از گذشت ۲۳ دقیقه آب این حوض ۱۰۲ لیتر می‌شود.

مثال ۳۷: با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از دنباله‌های زیر حسابی هستند؟ سپس الگوی ساختن هر دنباله را پیدا کنید.

الف) $۱\,,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵}$

ب) $-۱۵,-۱۸,-۲۱,-۲۴$

ج) $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\frac{۵}{۶}$

د) $۰\,,\sqrt{۳},۲\sqrt{۳},۳\sqrt{۳},۴\sqrt{۳},...$

جواب

الف)

این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی نیست. زیرا اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن، مقدار ثابتی نمی‌باشد. ولی می‌توان جمله‌ی عمومی آن را که به‌صورت زیر است، نوشت:

$$t_n = \frac{۱}{n}$$

ب)

این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی است. زیرا اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن مقدار ثابتی است. یعنی $d = -۳$ قدرنسبت دنباله می‌باشد. جمله‌ی عمومی آن به‌صورت زیر است:

$$t_n = -۱۵ + (n-۱)\times(-۳) \Rightarrow t_n = -۳n - ۱۲$$

ج)

این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی نیست. زیرا اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن مقدار ثابتی نمی‌باشد. ولی می‌توان جمله‌ی آن را که به‌صورت زیر است، نوشت:

$$t_n = \frac{n}{n+۱}$$

د)

این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی است. زیرا اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن مقدار ثابتی است. یعنی $d = \sqrt{۳}$ قدرنسبت دنباله می‌باشد. جمله‌ی عمومی این دنباله به‌صورت زیر است:

$$t_n = ۰ + (n-۱)\times\sqrt{۳} \Rightarrow t_n = \sqrt{۳}n - \sqrt{۳}$$

مثال ۳۸: اگر دو جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۱۰ و ۳ باشند، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید. (چند دنباله وجود دارد؟)

جواب دو دنباله وجود دارد که به‌صورت زیر می‌باشند:

(۱) دنباله‌ی افزایشی با $t_۱ = ۳ \ , \ d = ۷$: $\quad ۳,۱۰,۱۷,۲۴,۳۱,...$

(۲) دنباله‌ی کاهشی با $t_۱ = ۱۰ \ , \ d = -۷$: $\quad ۱۰,۳,-۴,-۱۱,-۱۸,...$

مثال ۳۹: در دنباله‌ی حسابی $t_۱,t_۲,t_۳,...,t_n,...$ نشان دهید $t_n - t_{n-۱}$ مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت چه عددی را نشان می‌دهد؟

جواب می‌دانیم در دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی nاُم برابر است با: $t_n = t_۱ + (n-۱)d$. با توجه به این رابطه، جمله‌ی $(n-۱)$اُم برابر است با:

$$t_{n-۱} = t_۱ + (n-۱-۱)d = t_۱ + (n-۲)d$$

اکنون داریم:

$$t_n - t_{n-۱} = \cancel{t_۱} + (n-۱)d - \cancel{t_۱} - (n-۲)d = \cancel{nd} - d - \cancel{nd} + ۲d = d$$

حاصل به‌دست آمده، همان مقدار ثابت قدرنسبت دنباله را نشان می‌دهد.

مثال ۴۰: اگر در جملات یک دنباله‌ی حسابی، ابتدا عدد $\frac{۱}{۳}$ و سپس عدد $\frac{۱}{۴}$ قرار گرفته باشند، جمله‌ی قبل از عدد $\frac{۱}{۳}$ را بنویسید.

جواب قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$d = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳} = -\frac{۱}{۱۲}$$

بنابراین اگر x جمله‌ی قبل از عدد $\frac{۱}{۳}$ باشد، داریم:

$$x + \left(-\frac{۱}{۱۲}\right) = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۵}{۱۲}$$

نکته ۱۴: سه عدد a، b و c در صورتی تشکیل جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی را می‌دهند که در تساوی زیر صدق کنند:

$$\mathbf{۲b = a + c}$$

مثال ۴۱: نکته ۱۴ را ثابت کنید.

جواب فرض می‌کنیم a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند. اگر a جمله‌ی اول و d قدرنسبت این دنباله باشد، در این‌صورت باید داشته باشیم:

$$b = a + d \quad , \quad c = a + 2d$$

اکنون باید درستی تساوی را بررسی کنیم. داریم:

$$\begin{cases} 2b = 2(a+d) = 2a + 2d \\ a + c = a + a + 2d = 2a + 2d \end{cases} \Rightarrow 2b = a + c$$

مثال ۴۲: دنباله‌ی زیر به‌ازای چه مقداری از x، یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود؟

$$1 - x \, , \, 2 + x \, , \, 1 + 2x$$

جواب با توجه به نکته ۲ داریم:

$$2(2+x) = 1 - x + 1 + 2x \Rightarrow 4 + 2x = 2 + x \Rightarrow 2x - x = 2 - 4 \Rightarrow x = -2$$

مثال ۴۳: اگر جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی ۱۷ و جمله‌ی دوازدهم آن ۵۲ باشد، جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

جواب

$$t_5 = 17 \quad , \quad t_{12} = 52$$

$$\begin{cases} t_5 = a + 4d \\ t_{12} = a + 11d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 4d = 17 \\ t_1 + 11d = 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-t_1} - 4d = -17 \\ \cancel{t_1} + 11d = 52 \end{cases}$$

$$7d = 35 \Rightarrow d = 5 \qquad (*)$$

جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت زیر است:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = -3 + (n-1) \times 5 \Rightarrow t_n = 5n - 8$$

مثال ۴۴: نشان دهید که اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی ضرب کنیم، دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی است.

جواب می‌دانیم جملات یک دنباله‌ی حسابی به‌صورت زیر است:

$$t_1 \, , \, t_1 + d \, , \, t_1 + 2d \, , \, \ldots \, , \, t_1 + (n-1)d \, , \ldots$$

اکنون اگر هریک از جملات دنباله را در عددی مانند c ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$ct_۱ \,,\, ct_۱ + cd \;,\; ct_۱ + ۲cd \;,\; \dots \;,\; ct_۱ + (n-۱)cd \;,\dots$$

دنباله‌ی به‌دست آمده، یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $ct_۱$ و قدرنسبت cd است.

مثال ۴۵: اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود، نشان دهید که یکی از زاویه‌های این مثلث ۶۰ درجه است.

جواب ازآنجاکه اندازه‌ی سه زاویه‌ی مثلث تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند، لذا در تساوی مربوط به نکته ۳ صدق می‌کنند. بنابراین اگر x، y و z اندازه‌ی سه زاویه‌ی این مثلث باشند، داریم:

$$۲y = x + y \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، یعنی:

$$x + y + z = ۱۸۰^\circ \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۲y = x + z \\ x + y + z = ۱۸۰ \end{cases} \Rightarrow ۲y + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow y = ۶۰^\circ$$

بنابراین یکی از زاویه‌های این مثلث ۶۰° است.

مثال ۴۶: بین دو عدد ۲ و ۲۶ سه عدد بیابید به‌طوری‌که پنج جمله‌ی حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند.

جواب این مثال دو جواب دارد:

(۱) اگر جمله‌ی اول ۲ و جمله‌ی پنجم ۲۶ باشد، در این‌صورت داریم:

$$t_۱ = ۲ \quad , \quad t_۵ = ۲۶$$

$$t_۵ = ۲۶ \Rightarrow t_۱ + ۴d = ۲۶ \Rightarrow ۲ + ۴d = ۲۶ \Rightarrow d = ۶$$

بنابراین پنج جمله‌ی حاصل عبارتند از:

$$۲,۸,۱۴,۲۰,۲۶$$

(۲) اگر جمله‌ی اول ۲۶ و جمله‌ی پنجم ۲ باشد، در این‌صورت داریم:

$$t_۱ = ۲۶ \quad , \quad t_۵ = ۲$$

$$t_۵ = ۲ \Rightarrow t_۱ + ۴d = ۲ \Rightarrow ۲۶ + ۴d = ۲ \Rightarrow d = -۶$$

بنابراین پنج جمله‌ی حاصل عبارتند از:

$$۲۶,۲۰,۱۴,۸,۲$$

مثال ۴۷: در یک دنباله‌ی حسابی قدرنسبت ۱۱ و جمله‌ی اول ۱- است. چندمین جمله‌ی این دنباله برابر با ۲۱۹ می‌باشد؟

جواب

$$t_۱ = -۱ \quad , \quad d = ۱۱$$

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d \Rightarrow -۱ + (n-۱) \times ۱۱ = ۲۱۹ \Rightarrow ۱۱n - ۱۲ = ۲۱۹ \Rightarrow n = ۲۱$$

مثال **۴۸:** جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی زیر را به‌دست آورید و معین کنید چندمین جمله‌ی آن برابر با ۹۸ است.

$$-۱۷, -۱۲, -۷, -۲, ...$$

جواب

$$t_۱ = -۱۷ \quad , \quad d = -۱۲ - (-۱۷) = ۵$$

$$t_n = a + (n-۱)d \Rightarrow t_n = -۱۷ + (n-۱) \times ۵ \Rightarrow t_n = ۵n - ۲۲$$

$$۵n - ۲۲ = ۹۸ \Rightarrow ۵n = ۱۲۰ \Rightarrow n = ۲۴$$

نکته **۱۵:** برای به‌دست آوردن قدرنسبت دنباله‌ی حسابی دو حالت وجود دارد:

الف) اگر دو جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی (t_n و $t_{n-۱}$) مشخص باشد، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{d = t_n - t_{n-۱}}$$

ب) اگر دو جمله‌ی غیرمتوالی از یک دنباله‌ی حسابی (t_n و t_m) مشخص باشد، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{d = \frac{t_n - t_m}{n - m}}$$

مثال **۴۹:** در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی پنجم برابر ۷ و جمله‌ی یازدهم برابر ۲۵ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

جواب با توجه به نکته ۱۵ قسمت (ب) داریم:

$$t_۵ = ۷ \quad , \quad t_{۱۱} = ۲۵$$

$$d = \frac{t_{۱۱} - t_۵}{۱۱ - ۵} = \frac{۲۵ - ۷}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳$$

مثال **۵۰:** در یک دنباله‌ی حسابی $t_{۱۵} = ۲۸$ و $t_{۲۰}^۲ - t_{۱۰}^۲ = ۳۵۰$. قدرنسبت دنباله را به‌دست آورید.

جواب با توجه به نکته ۱۵ قسمت (ب) داریم:

$$d=\frac{t_n-t_m}{n-m}\Rightarrow t_n-t_m=(n-m)d \qquad (*)$$

اکنون از رابطه‌ی $(*)$داریم:

$$t_{20}-t_{10}=10d \qquad (1)$$

همچنین داریم:

$$t_{15}=28\Rightarrow t_1+14d=28\xrightarrow{\times 2}2t_1+28d=56 \qquad (2)$$

$$t_{20}+t_{10}=t_1+19d+t_1+9d=2t_1+28d\overset{(2)}{=}56 \qquad (3)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۳) داریم:

$$a_{20}^2-a_{10}^2=350\Rightarrow \underbrace{(a_{20}-a_{10})}_{10d}\underbrace{(a_{20}+a_{10})}_{56}=350\Rightarrow 560d=350\Rightarrow d=\frac{5}{8}$$

دنباله‌ی هندسی:

تعریف دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (به‌جز جمله‌ی اول) از ضرب جمله‌ی قبل از آن در عددی ثابت (مخالف صفر) به‌دست می‌آید، دنباله‌ی هندسی نامیده می‌شود. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامند.

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی را با t_1، قدرنسبت آن را با r و شماره‌ی جملات را با n نمایش دهیم، جملات دنباله‌ی هندسی به‌صورت زیر خواهند بود:

t_1	t_2	t_3	t_4	.....	t_n
t_1	t_1r	t_1r^2	t_1r^3	.....	t_1r^{n-1}

جمله‌ی nاُم این دنباله t_1r^{n-1} است. بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی برابر است با:

$$\mathbf{t_n=t_1r^{n-1}}$$

مثال ۵۱: توپی در اختیار داریم که هرگاه آن را از ارتفاعی به زمین رها کنیم، در برخورد با زمین مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهد و در هر برگشت به بالا به ۶۰ درصد ارتفاع قبلی خود برمی‌گردد.

الف) این توپ را از ارتفاع ۲۵ متری رها می‌کنیم. میزان ارتفاعی که توپ پس از اولین و دومین و سومین برخورد با زمین به بالا می‌آید را بنویسید.

ب) هر جمله‌ی این دنباله با جمله‌ی قبلی چه رابطه‌ای دارد؟

ج) پس از n برخورد با زمین، توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

د) آیا این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی است؟

جواب

الف)

میزان ارتفاع توپ پس از اولین برخورد $\frac{۶۰}{۱۰۰}\times ۲۵ = ۱۵\ m$

میزان ارتفاع توپ پس از دومین برخورد $\frac{۶۰}{۱۰۰}\times ۱۵ = ۹\ m$

میزان ارتفاع توپ پس از سومین برخورد $\frac{۶۰}{۱۰۰}\times ۹ = ۵/۴\ m$

ب) هر جمله‌ی این دنباله از ضرب عدد $\frac{۶۰}{۱۰۰}$ در عدد قبلی به‌دست آمده است. دنباله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۲۵\times\frac{۶۰}{۱۰۰}\ ,\ ۲۵\times\left(\frac{۶۰}{۱۰۰}\right)^۲\ ,\ ۲۵\times\left(\frac{۶۰}{۱۰۰}\right)^۳\ ,\ ....$$

ج)

میزان ارتفاع توپ پس از برخورد nاُم $۲۵\times\left(\frac{۶۰}{۱۰۰}\right)^n$

د) خیر. زیرا جملات این دنباله با افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به‌دست نیامده‌اند، بلکه در مقدار ثابتی ضرب شده‌اند.

مثال ۵۲: در هریک از دنباله‌های هندسی زیر، ابتدا جمله‌ی اول و قدرنسبت دنباله‌ها را مشخص کنید، سپس جمله‌ی عمومی آن‌ها را بنویسید.

الف) $۳,۶,۱۲,۲۴,۴۸,...$

ب) $۱\ ,\ \sqrt{۵}\ ,\ ۵\ ,\ ۵\sqrt{۵}\ ,\ ۲۵\ ,\ ...$

ج) $۲\ ,\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۹},\frac{۲}{۲۷}\ ,...$

د) $۱\ ,-۱\ ,\ ۱\ ,-۱\ ,...$

جواب

الف)

$t_۱ = ۳ \quad , \quad r = ۲$

$t_n = t_۱ r^{n-۱} \Rightarrow t_n = ۳\times ۲^{n-۱}$

ب)

$t_۱ = ۱ \quad , \quad r = \sqrt{۵}$

$t_n = t_۱ r^{n-۱} \Rightarrow t_n = ۱\times\left(\sqrt{۵}\right)^{n-۱} = \left(\sqrt{۵}\right)^{n-۱}$

ج)

$$t_۱ = ۲ \quad , \quad r = \frac{۱}{۳}$$

$$t_n = t_۱ r^{n-۱} \Rightarrow t_n = ۲ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^{n-۱}$$

د)

$$t_۱ = ۱ \quad , \quad r = -۱$$

$$t_n = t_۱ r^{n-۱} \Rightarrow t_n = ۱ \times (-۱)^{n-۱} = (-۱)^{n-۱}$$

مثال ۵۳: وقتی می‌گویند در یک کشور نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت ۳ درصد است، یعنی جمعیت آن کشور در هر سال به میزان ۳ درصد جمعیت سال قبل افزایش می‌یابد. فرض کنید یک کشور ۵۰ میلیون نفر جمعیت دارد و نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت آن ۳ درصد است.

الف) جمعیت سال دوم چند برابر جمعیت سال اول است؟ جمعیت سال سوم چند برابر جمعیت سال دوم است؟

ب) جمعیت این کشور را در سال‌های اول تا پنجم بنویسید. (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید.)

ج) این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی است یا یک دنباله‌ی هندسی؟

د) جمعیت این کشور پس از گذشت n سال چه‌قدر خواهد بود؟

جواب جمعیت در هر سال از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

جمعیت در هر سال = جمعیت در سال قبل + ۰/۰۳ × (جمعیت در سال قبل)

اکنون داریم:

$$\text{جمعیت در سال دوم} = ۵۰ + ۰/۰۳ \times ۵۰ = ۵۰(۱ + ۰/۰۳) = ۵۰ \times ۱/۰۳$$

$$\frac{\text{جمعیت در سال دوم}}{\text{جمعیت در سال اول}} = \frac{۵۰ \times ۱/۰۳}{۵۰} = ۱/۰۳$$

جمعیت در سال دوم ۱/۰۳ برابر جمعیت در سال اول است.

جمعیت در سال سوم = جمعیت در سال دوم + ۰/۰۳ × (جمعیت در سال دوم)

$$= ۵۰ \times ۱/۰۳ + ۰/۰۳ \times (۵۰ \times ۱/۰۳) = ۵۰ \times ۱/۰۳(۱ + ۰/۰۳)$$

$$= ۵۰ \times ۱/۰۳ \times ۱/۰۳ = ۵۰ \times (۱/۰۳)^۲$$

$$\frac{\text{جمعیت در سال سوم}}{\text{جمعیت در سال دوم}} = \frac{۵۰ \times (۱/۰۳)^۲}{۵۰ \times ۱/۰۳} = ۱/۰۳$$

جمعیت در سال سوم، ۱/۰۳ برابر جمعیت در سال دوم است.

ب) جمعیت کشور تا سال سوم را در قسمت (الف) محاسبه کردیم. اکنون جمعیت کشور در سال‌های چهارم و پنجم را به‌دست می‌آوریم.

جمعیت در سال چهارم = جمعیت در سال سوم + $۰/۰۳\times$ (جمعیت در سال سوم)

$$=۵۰\times\left(۱/۰۳\right)^{۲}+۰/۰۳\times۵۰\times\left(۱/۰۳\right)^{۲}=۵۰\times\left(۱/۰۳\right)^{۳}$$

جمعیت در سال پنجم = جمعیت در سال چهارم + $۰/۰۳\times$ (جمعیت در سال چهارم)

$$=۵۰\times\left(۱/۰۳\right)^{۳}+۰/۰۳\times۵۰\times\left(۱/۰۳\right)^{۳}=۵۰\times\left(۱/۰۳\right)^{۴}$$

ج) این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی است. زیرا جملات آن از ضرب یک مقدار ثابت در جمله‌ی قبلی به‌دست آمده‌اند.

د) جمعیت کشور در سال nاُم برابر است با: $۵۰\times\left(۱/۰۳\right)^{n-۱}$

مثال ۵۴: کدام‌یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌های هندسی هستند؟ دلیل خود را ارائه کنید.

الف) $۵\ ,\ ۵\ ,\ ۵\ ,\ ۵\ ,\ ۵\ ,\ ...$

ب) $-۱, ۲\ , -۴\ , ۸\ , -۱۶\ , ...$

ج) $۲,۴,۶,۸,...$

د) $۱-\pi, ۱-\pi^{۲}\ , \left(۱-\pi^{۲}\right)\left(۱+\pi\right)\ , ...$

جواب

الف) این دنباله، یک دنباله‌ی ثابت است. ولی اگر قدرنسبت دنباله را برابر ۱ درنظر بگیریم، می‌توانیم دنباله را دنباله‌ی هندسی بنامیم.

ب) این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی است. زیرا هر جمله‌ی آن از ضرب جمله‌ی قبلی در عدد ۲- به‌دست آمده است. یعنی $r=-۲$ قدرنسبت دنباله است.

ج) این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی نیست. زیرا هر جمله‌ی آن از جمع جمله‌ی قبلی با عدد ۲ به‌دست آمده است و یک دنباله‌ی حسابی را تشکیل داده‌اند.

ب) این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی است. زیرا هر جمله‌ی آن از ضرب جمله‌ی قبلی در عدد $\left(۱+\pi\right)$ به‌دست آمده است. یعنی $\left(r=۱+\pi\right)$ قدرنسبت دنباله است.

مثال ۵۵: اگر یکی از جملات یک دنباله‌ی هندسی ۵ و جمله‌ی بعدی آن ۱- باشد، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید.

جواب در این دنباله داریم: $r=-\frac{۱}{۵}$. بنابراین:

$$۵\ , -۱\ , \frac{۱}{۵}\ , -\frac{۱}{۲۵}\ , \frac{۱}{۱۲۵}$$

مثال ۵۶: اگر یکی از جملات یک دنباله‌ی هندسی ۳ و جمله‌ی بعدی آن ۴ باشد، جمله‌ی قبل از ۳ را بنویسید.

جواب در این دنباله داریم: $r = \frac{۴}{۳}$. بنابراین جمله‌ی قبل از عدد ۳ برابر است با:

$$۳ \div \frac{۴}{۳} = \frac{۹}{۴}$$

مثال ۵۷: اگر دو جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب $a\,(a \neq ۰)$ و b باشند، جمله‌ی بعد از b چه خواهد بود؟

جواب در این دنباله قدرنسبت برابر است با:

$$a\,,\,b \Rightarrow r = \frac{b}{a}$$

بنابراین جمله‌ی بعد از b برابر است با:

$$b \times \frac{b}{a} = \frac{b^۲}{a}$$

نکته ۱۶: سه عدد a، b و c در صورتی تشکیل جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی را می‌دهند که در تساوی زیر صدق کنند:

$$\mathbf{b^۲ = ac}$$

مثال ۵۸: نکته ۱۶ را ثابت کنید.

جواب اگر جمله‌ی اول را $t_۱$ و قدرنسبت را r درنظر بگیریم، داریم:

$$\underbrace{t_۱}_{a}, \underbrace{t_۱r}_{b}, \underbrace{t_۱r^۲}_{c}$$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} b^۲ = (t_۱r)^۲ = t_۱^۲r^۲ \\ ac = (t_۱) \times (t_۱r^۲) \Rightarrow t_۱^۲r^۲ \end{array}\right. \Rightarrow b^۲ = ac$$

مثال ۵۹: در دنباله‌ی زیر عدد x را طوری تعیین کنید که این دنباله یک دنباله‌ی هندسی شود. مسئله چند جواب دارد؟

$$۱ - x,\ x\ ,\ ۱ + x$$

جواب با توجه به نکته ۱۶ داریم:

$$x^{۲}=(۱-x)(۱+x)\Rightarrow x^{۲}=۱-x^{۲}\Rightarrow ۲x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

این مسئله دو جواب دارد. به‌ازای $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ دو دنباله‌ی هندسی حاصل می‌شود. بنابراین:

اگر $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ ۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

اگر $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ ۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

مثال ۶۰: اگر جمله‌ی چهارم یک دنباله‌ی هندسی برابر ۱ و جمله‌ی هفتم آن برابر ۸ باشد، جمله‌ی عمومی این دنباله چیست؟

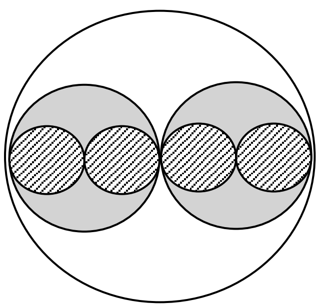
جواب

$$\begin{cases}t_{۴}=۱\\ t_{۷}=۸\end{cases}\Rightarrow t_{۷}=t_{۱}r^{۶}\Rightarrow ۱\times r^{۶}=۸\Rightarrow \left(r^{۲}\right)^{۳}=۲^{۳}\Rightarrow r^{۲}=۲\Rightarrow r=\pm\sqrt{۲}$$

اگر $r=\sqrt{۲}\Rightarrow t_n=۱\times\left(\sqrt{۲}\right)^{n-۱}=\left(\sqrt{۲}\right)^{n-۱}$

اگر $r=-\sqrt{۲}\Rightarrow t_n=۱\times\left(-\sqrt{۲}\right)^{n-۱}=\left(-\sqrt{۲}\right)^{n-۱}$

مثال ۶۱: اگر مساحت یک دایره برابر $S_{۱}$ و داخل آن دو دایره به شکل زیر رسم کنیم و مجموع مساحت آن‌ها را $S_{۲}$ بنامیم، با تکرار این عملیات دنباله‌ی $S_{۱},S_{۲},...,S_n,...$ ساخته می‌شود.
جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید و نشان دهید که یک دنباله‌ی هندسی است.



جواب شعاع اولین دایره را r درنظر می‌گیریم. لذا مساحت اولین دایره πr^{2} است؛ یعنی $S_{1}=\pi r^{2}$. در مرحله‌ی دوم، دایره با شعاع $\frac{r}{2}$ داریم که مجموع مساحت آن‌ها $\pi\left(\frac{r}{2}\right)^{2}+\pi\left(\frac{r}{2}\right)^{2}$ خواهد بود؛ یعنی $S_{2}=\frac{1}{2}\pi r^{2}$. در مرحله‌ی سوم، چهار دایره داریم که شعاع هریک از آن‌ها $\frac{r}{4}$ است و مجموع مساحت آن‌ها $4\times\pi\left(\frac{r}{4}\right)^{2}$ یعنی $S_{3}=\frac{1}{4}\pi r^{2}$ خواهد بود.

در هر مرحله تعداد دایره‌ها دو برابر تعداد دایره‌های مرحله‌ی قبل و شعاع آن‌ها نصف شعاع دایره‌های مرحله‌ی قبل است. بنابراین شعاع دایره‌ها یک دنباله به‌صورت زیر تشکیل می‌دهند:

$$r\,,\frac{1}{2}r\,,\frac{1}{4}r,\frac{1}{8}r\,,\,...$$

و تعداد دایره‌ها یک دنباله به‌صورت $1,2,4,8,...$ خواهد بود.

بنابراین در مرحله‌ی nاُم، شعاع دایره‌ها $\frac{1}{2^{n-1}}r$ و تعداد آن‌ها 2^{n-1} است و مجموع مساحت آن‌ها $2^{n-1}\times\pi\left(\frac{r}{2^{n-1}}\right)^{2}$ است. یعنی:

$$\pi r^{2}\,,\frac{1}{2}\pi r^{2}\,,\frac{1}{4}\pi r^{2}\,,\,...\,,\frac{1}{2^{n-1}}\pi r^{2}\,\,,\,...$$

بنابراین دنباله‌ی فوق، یک دنباله‌ی با جمله‌ی اول πr^{2} و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است. جمله‌ی عمومی این دنباله به‌صورت زیر است:

$$t_{n}=\frac{1}{2^{n-1}}\pi r^{2}$$

مثال ۶۲: اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را در عددی ضرب کنیم، نشان دهید که دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.

جواب شکل کلی یک دنباله‌ی هندسی به‌صورت $t_{1}\,,\,t_{1}r\,,\,t_{1}r^{2},...,t_{1}r^{n-1},...$ است. حال اگر جملات دنباله را در عدد c ضرب کنیم، دنباله‌ی جدید به‌صورت زیر خواهد بود:

$$ct_{1}\,,\,ct_{1}r\,,\,ct_{1}r^{2},...,ct_{1}r^{n-1},...$$

این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ct_{1} و قدرنسبت r است.

مثال ۶۳: اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را به توان ۲ برسانیم، نشان دهید که دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.

جواب شکل کلی یک دنباله‌ی هندسی به‌صورت $t_۱ , t_۱r , t_۱r^۲,..., t_۱r^{n-۱},...$ است. حال اگر جملات دنباله را به توان ۲ برسانیم، دنباله‌ی جدید به شکل $t_۱^۲ , t_۱^۲r^۲ , t_۱^۲r^۴,..., t_۱^۲r^{۲n-۲},...$ خواهد بود. این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $t_۱^۲$ و قدرنسبت $r^۲$ است.

مثال ۶۴: آیا یک دنباله می‌تواند هم دنباله‌ی هندسی باشد و هم دنباله‌ی حسابی؟ توضیح دهید.

جواب فرض می‌کنیم دنباله‌ای هم حسابی و هم هندسی باشد. پس این دنباله به‌صورت زیر است:

$$t_۱ , t_۱r , t_۱r^۲,..., t_۱r^{n-۱},...$$

و چون دنباله‌ی فوق، یک دنباله‌ی حسابی نیز هست، بنابراین تفاضل دو جمله‌ی متوالی باید مقداری ثابت باشد. تفاضل جملات متوالی دنباله‌ی فوق به‌صورت زیر است:

$$t_۱(r-۱), t_۱r(r-۱), t_۱r^۲(r-۱)$$

بنابراین مقادیر فوق باید با هم مساوی باشند؛ یعنی: $t_۱(r-۱) = t_۱r(r-۱)$

تساوی فوق در صورتی برقرار است که: $t_۱ = ۰$ یا $r = ۱$.

در حالت $t_۱ = ۰$، دنباله به شکل دنباله‌ی ثابت $۰ , ۰ , ۰ , ...$ خواهد بود که دنباله‌ای است حسابی با قدرنسبت صفر و دنباله‌ای است هندسی با قدرنسبت هر عدد دلخواه.

در حالت $r = ۱$، دنباله به شکل دنباله‌ی ثابت $t_۱ , t_۱ , t_۱ , ...$ خواهد بود که دنباله‌ای است حسابی با قدرنسبت صفر و دنباله‌ای است هندسی با قدرنسبت یک.

مثال ۶۵: اگر $t_۱ , t_۲ , t_۳ , ... , t_n , ...$ یک دنباله‌ی هندسی باشد و $t_۱t_۳ = ۴$ و $t_۳t_۵ = ۱۶$، جمله‌ی اول و قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی را بیابید.

جواب

$$\begin{cases} t_۱t_۳ = ۴ \\ t_۳t_۵ = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱\left(t_۱r^۲\right) = ۴ \\ \left(t_۱r^۲\right)\left(t_۱r^۴\right) = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱^۲r^۲ = ۴ \\ t_۱^۲r^۶ = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۱^۲r^۶}{t_۱^۲r^۲} = \frac{۱۶}{۴} \Rightarrow r^۴ = ۴ \Rightarrow r = \pm\sqrt{۲} , t_۱ = \pm\sqrt{۲}$$

مثال ۶۶: بین دو عدد ۱۰ و ۳۲۰ چهار واسطه‌ی هندسی درج کنید.

جواب این مثال دو جواب دارد:

(۱) اگر جمله‌ی اول ۱۰ و جمله‌ی ششم ۳۲۰ باشد، در این‌صورت داریم:

$$\begin{cases} t_1 = 10 \\ t_6 = 320 \end{cases} \Rightarrow t_6 = t_1 r^5 \Rightarrow 10 r^5 = 320 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r^5 = 2^5 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین شش جمله‌ی حاصل عبارتند از:

$$10, 20, 40, 80, 160, 320$$

(۲) اگر جمله‌ی اول ۳۲۰ و جمله‌ی ششم ۱۰ باشد، در این‌صورت داریم:

$$\begin{cases} t_1 = 320 \\ t_6 = 10 \end{cases} \Rightarrow t_6 = t_1 r^5 \Rightarrow 320 r^5 = 10 \Rightarrow r^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow r^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

بنابراین شش جمله‌ی حاصل عبارتند از:

$$320, 160, 80, 40, 20, 10$$

مثال ۶۷: در یک دنباله‌ی هندسی، قدرنسبت $-\frac{3}{2}$ و جمله‌ی اول ۱- می‌باشد. جمله‌ی چندم این دنباله برابر با $\frac{243}{32}$ است؟

جواب

$$t_1 = -1 \quad , \quad r = -\frac{3}{2}$$

$$t_n = ar^{n-1} \Rightarrow (-1) \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{243}{32} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} = -\frac{243}{32} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{3}{2}\right)^5$$

$$\Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

مثال ۶۸: اگر $12x - 4$، $5x$ و $2x + 1$ جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، ابتدا مقدار x را محاسبه کرده، سپس دنباله را مشخص کنید.

جواب با توجه به نکته ۱۶ داریم:

$$(5x)^2 = (12x - 4)(2x + 1) \Rightarrow 25x^2 = 24x^2 + 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$2 \times 2 + 1 \ , \ 5 \times 2 \ , \ 12 \times 2 - 4 \Rightarrow 5, 10, 20$$

نکته ۱۷: برای به‌دست آوردن قدرنسبت دنباله‌ی هندسی دو حالت وجود دارد:

الف) اگر دو جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی (t_n و t_{n-1}) مشخص باشد، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$r=\frac{t_n}{t_{n-1}}$$

ب) اگر دو جمله‌ی غیرمتوالی از یک دنباله‌ی هندسی (t_n و t_m) مشخص باشد، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$r=\sqrt[n-m]{\frac{t_n}{t_m}}$$

مثال ۶۹: در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی دوم برابر ۲ و جمله‌ی پنجم برابر $\frac{۱۶}{۲۷}$ است. جمله‌ی عمومی دنباله را مشخص کنید.

جواب با توجه به نکته ۱۷ قسمت (ب) داریم:

$$t_۲=۲\quad,\quad t_۵=\frac{۱۶}{۲۷}$$

$$r=\sqrt[۵-۲]{\frac{\frac{۱۶}{۲۷}}{۲}}=\sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}}=\sqrt[۳]{\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$t_۲=t_۱r\Rightarrow t_۱\times\frac{۲}{۳}=۲\Rightarrow t_۱=۳$$

$$t_n=t_۱r^{n-۱}\Rightarrow t_n=۳\times\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n-۱}$$

مثال ۷۰: در یک دنباله‌ی هندسی، رابطه‌ی $t_۲t_۶t_{۱۴}=۴t_۸^۳$ برقرار است. قدرنسبت این دنباله را تعیین کنید.

جواب

$$t_۲t_۶t_{۱۴}=۴t_۸^۳\Rightarrow(t_۱r)\left(t_۱r^۵\right)\left(t_۱r^{۱۳}\right)=۴\left(t_۱r^۷\right)^۳\Rightarrow \cancel{t_۱^۳}r^{۱۹}=۴\cancel{t_۱^۳}r^{۲۱}\Rightarrow r=\frac{۱}{۴}\Rightarrow r=\pm\frac{۱}{۲}$$

مثال ۷۱ **(چهارگزینه‌ای):** اگر $a+۱$، $a+۵$ و $۳a+۵$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

جواب با توجه به نکته ۱۴ داریم:

$$۲(a+۵)=a+۱+۳a+۵ \Rightarrow ۲a+۱۰=۴a+۶ \Rightarrow ۲a-۴a=۶-۱۰ \Rightarrow -۲a=-۴ \Rightarrow a=۲$$

بنابراین گزینه «۱» صحیح است.

مثال ۷۲ **(چهارگزینه‌ای):** چندمین جمله از دنباله‌ی هندسی ...,۳,۶,۱۲ برابر با ۷۶۸ است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

جواب

$$r=\frac{۶}{۳}=۲ \quad , \quad t_۱=۳$$

$$t_n=t_۱r^{n-۱} \Rightarrow ۷۶۸=۳\times۲^{n-۱} \Rightarrow ۲^{n-۱}=۲۵۶ \Rightarrow ۲^{n-۱}=۲^۸ \Rightarrow n-۱=۸ \Rightarrow n=۹$$

بنابراین گزینه «۳» صحیح است.

تمرین

سؤالات چهارگزینه‌ای:

۱- اگر $A_{۱}=\{۱,۲,...,۱۰\}$، $A_{۲}=\{۲,۳,...,۱۱\}$، $A_{۳}=\{۳,۴,...,۱۲\}$ و ... تعدادی مجموعه باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی $A_{۳}\bigcap A_{۴}\bigcap A_{۵}\bigcap ...\bigcap A_{۸}$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲- A و B دو مجموعه‌ی دلخواه هستند. کدام گزینه در حالت کلی نادرست است؟

۱) اگر $A\bigcap B'=A$، آن‌گاه $A\bigcap B=\varnothing$

۲) همواره $A'-B'=B-A$

۳) اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $B'\subseteq A'$

۴) اگر $A\bigcap B=\varnothing$، آن‌گاه $A'\subseteq B$

۳- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) مجموعه‌ی عددهای حقیقی بین ۲ و ۳

۲) مجموعه‌ی عددهای اول زوج

۳) مجموعه‌ی عددهای اعشاری که قسمت صحیح آن‌ها ۲ است

۴) مجموعه‌ی عددهای اول فرد

۴- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی هشتم ۱۰ برابر جمله‌ی هفتم می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۵- چندمین جمله از دنباله‌ی حسابی $-۱۰۴,-۹۱,-۷۸,...$ برابر صفر است؟

۱) جمله‌ی هفتم ۲) جمله‌ی نهم ۳) جمله‌ی پنجم ۴) جمله‌ی یازدهم

سؤالات تشریحی:

۶- اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>-۵\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۳\le x\le ۴\}$، هریک از مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه نوشته و حاصل مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $A\bigcap B$

ب) $A\bigcup B$

ج) $A-B$

د) $B-A$

۷- مجموعه‌ی A متناهی و مجموعه‌های B و C نامتناهی هستند. متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $(A \cap B) - C$
ب) $B - (A - C)$
ج) $B - (C - A)$
د) $A \cup (B - C)$

۸- تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه که شایان و سامان جزء آن‌ها هستند، ۱۹۳ نفر است. ۱۴۰ نفر از آن‌ها نه دوست شایان هستند و نه دوست سامان. ضمناً شایان دوست سامان نیست.

الف) در صورتی‌که شایان در مدرسه ۲۴ دوست داشته باشد، سامان در مدرسه حداقل چند دوست دارد؟

ب) اگر شایان در مدرسه ۲۴ دوست داشته باشد که ۱۴تای آن‌ها دوست سامان هم باشند، آن‌گاه سامان دقیقاً چند دوست در مدرسه دارد؟

۹- اگر جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی حسابی ۵/۶ و جمله‌ی دوازدهم آن ۷- باشد، جمله‌ی ششم آن چه‌قدر است؟

۱۰- در یک دنباله‌ی هندسی داریم: $a_2 a_4 = 2a_5$. جمله‌ی اول را مشخص کنید.

توجه **دانش‌آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های بیش‌تر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.**