

ریاضیات پایه دهم دوره دوم متوسطه تابستانه

ریاضی (۱) - هندسه (۱)

رشته ریاضی و فیزیک

تألیف: دپارتمان متوسطه دوم مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان

نظارت عالی: علی خزایی

سرشناسه
عنوان و نام پدیدآور : ریاضیات پایه دهم دوره دوم متوسطه تابستانه ریاضی (۱) - هندسه (۱) : رشته ریاضی و فیزیک
مشخصات نشر : تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری : ۱۶۰ ص؛ ۲۲×۲۹ س.م.
شابک : 978-600-7903-87-2
وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
شناسه افزوده : کانون ریاضیدانان زمان
شماره کتابشناسی ملی : ۴۶۷۱۴۸۲

نام کتاب:	ریاضیات پایه دهم دوره دوم متوسطه تابستانه
تألیف:	دپارتمان متوسطه دوم مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان
شابک:	۹۷۸-۶۰۰-۷۹۰۳-۸۷-۲
	ISBN:978-600-7903-87-2
نوبت چاپ:	چاپ دوم - ۱۳۹۷
تیراژ:	۱۰۰۰ جلد

تعداد صفحات: ۱۶۰ صفحه

قیمت: ۲۰۰۰۰ تومان



ناشر: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز پخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)

فروشگاه دائمی: تهران - میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی - نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳

حق چاپ برای کانون ریاضیدانان زمان محفوظ است.

کپی برداری و تکثیر هر قسمت از کتاب بدون اجازه کتبی از کانون ریاضیدانان زمان پیگرد قانونی دارد.

پیش‌گفتار

گسترده‌گی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف از جمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری، افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه‌ی امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به‌عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

(۱) مجموعه کتاب‌های تابستانه: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

(۲) مجموعه کتاب‌های مقدماتی: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

(۳) مجموعه کتاب‌های پیشرفته: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

(۴) مجموعه کتاب‌های جامع: این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و سؤالات تشریحی و چهارگزینه‌ای بدون پاسخ در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۵) **مجموعه کتاب‌های تیزهوشان:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول (راهنمایی) برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول (راهنمایی) پیشنهاد می‌گردد.

۶) **مجموعه کتاب‌های موضوعی:** این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

۷) **مجموعه کتاب‌های یکی من، یکی تو:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤالات «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یک‌دیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

۸) **مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته (برای مقاطع ابتدایی و متوسطه اول) و در دو شکل تشریحی و چهارگزینه‌ای (برای مقطع متوسطه دوم) در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمون‌های آن فصل به عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمان و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و کتورش فرهنگ ریاضی

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

حضرت علی (ع):

کسی که با کتاب آراش می‌یابد، هیچ آراشی را از دست نداده است.

سپاس خداوند بزرگ را که توفیق دیگری ارزانی داشت تا بتوانیم خدمتی هر چند کوچک در پیش‌برد علم و دانش این سرزمین عزیز بنماییم.

کتاب حاضر، بر مبنای نیازها و حل مشکلات دانش‌آموزان در درس ریاضی و در جهت ارائه‌ی روشی بسیار ساده در آموزش مفاهیم ریاضی که خلاصه‌نویسی مطالب همراه با انجام تمرین‌های متناسب در هر فصل می‌باشد، تألیف شده است. از آنجاکه علم ریاضی علم پیوسته‌ای است، لذا در این کتاب سعی شده است مفاهیم و مطالب کتاب‌های درسی ریاضیات پایه دهم دوره دوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک که شامل ریاضی (۱) و هندسه (۱) می‌باشد، به صورت خلاصه و در راستای مروری بر سال‌های تحصیلی گذشته و چشم‌اندازی به سال تحصیلی آینده نگارش شود تا دانش‌آموزان در فصل تابستان، آمادگی مناسبی را برای شروع سال تحصیلی جدید کسب نمایند.

به دانش‌آموزان سرفراز و آینده‌ساز ایران زمین می‌گوییم:

* دوستان عزیز! در زندگی یاد بگیرید روی اهدافتان تمرکز کنید و با تمرین کردن فراوان به این مهارت بزرگ دست یابید.

آن زمان است که برنده و پیروز هستید. *

دپارتمان متوسطه دوم

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

بخش اول: ریاضی (۱)

۳	فصل اول: «مجموعه، الگو، دنباله»
۲۴	تمرین‌های فصل اول
۲۵	فصل دوم: «مثلثات»
۳۳	تمرین‌های فصل دوم
۳۵	فصل سوم: «توان‌های گویا و عبارت‌های جبری»
۶۰	تمرین‌های فصل سوم
۶۱	فصل چهارم: «معادله‌ها و نامعادله‌ها»
۷۲	تمرین‌های فصل چهارم
۷۳	فصل پنجم: «تابع»
۸۳	تمرین‌های فصل پنجم
۸۵	فصل ششم: «ترکیبیات»
۹۰	تمرین‌های فصل ششم
۹۱	فصل هفتم: «آمار و احتمال»
۱۰۰	تمرین‌های فصل هفتم

بخش دوم: هندسه (۱)

۱۰۳	فصل اول: «ترسیم‌های هندسی و استدلال»
۱۱۷	تمرین‌های فصل اول
۱۱۹	فصل دوم: «قضیه‌ی تالس، تشابه و کاربردهای آن»
۱۳۲	تمرین‌های فصل دوم
۱۳۳	فصل سوم: «چندضلعی‌ها»
۱۴۷	تمرین‌های فصل سوم
۱۴۹	فصل چهارم: «تجسم فضایی»
۱۶۰	تمرین‌های فصل چهارم



فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

در سال‌های تحصیلی گذشته آموختیم:

مجموعه:



به دسته یا گروهی از اشیاء، انسان‌ها، حیوانات، گل‌ها، اعداد و ... که دارای حداقل یک ویژگی مشترک باشند، مجموعه می‌گوییم. مانند مجموعه‌ی عددهای دو رقمی، مجموعه‌ی دانش‌آموزان یک کلاس، مجموعه‌ی گل‌های قرمز و ...



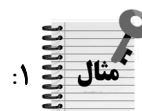
به هریک از اعداد، اشیاء، حروف و ... که یک مجموعه را تشکیل می‌دهند، عضو مجموعه می‌گویند. عضوهای یک مجموعه را با «،» از هم جدا می‌کنند.



۱: عضوهای یک مجموعه را داخل دو آکولاد یعنی $\{ \}$ قرار می‌دهیم. باید توجه داشته باشیم که نماد $\{ \}$ با پرانتز $()$ یا کروشه $[]$ اشتباه گرفته نشود.



۲: برای نام‌گذاری مجموعه‌ها از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنیم.



$$A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, \quad B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$B = \{\text{حسین}, \text{مهدي}, \text{علی}\}, \quad D = \{\text{آ}, \text{ب}, \text{پ}, \text{ت}, \text{ث}\}$$



۳: در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای یک مجموعه مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی ساخته نمی‌شود. همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی ساخته نمی‌شود. به‌عنوان مثال، مجموعه‌های $\{2, 2, 5, 8, 5\}$ ، $\{5, 2, 8\}$ و $\{2, 5, 8\}$ با هم مساوی‌اند.



۲: تعداد عضوهای مجموعه‌ی $A = \left\{ 4, 9, \frac{12}{3}, 8, \frac{5}{5}, 2/7 \right\}$ را تعیین کنید.



مجموعه‌ی A با مجموعه‌ی $A = \{4, 9, 2/7\}$ مساوی است که تعداد عضوهای آن برابر با ۳ می‌باشد.

$$\frac{12}{3} = 4, \quad 8 \frac{5}{5} = 8$$



۴: در ریاضیات، از مجموعه برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیر تکراری) استفاده می‌کنند.



۵: تنها عبارت‌هایی می‌توانند یک مجموعه را تشکیل دهند که برای ما انسان‌ها به‌طور دقیق مشخص شده باشند. به‌عنوان مثال، عبارت «انسان‌های قدبلند» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. زیرا چنین انسان‌هایی به‌طور دقیق مشخص نشده‌اند و هر شخص نظر خاص خود را در مورد انسان‌های قدبلند دارد. برای برخی از انسان‌ها نیز نمی‌توانیم بگوییم که قدبلند هستند یا خیر.

عضویت یک شیء در یک مجموعه:

برای این‌که نشان دهیم عضوی متعلق به یک مجموعه است، از نماد \in و برای این‌که نشان دهیم عضوی متعلق به یک مجموعه نیست، از نماد \notin استفاده می‌کنیم.



۶: از نماد \in یا \notin زمانی استفاده می‌شود که سمت چپ این نمادها، عضو و سمت راست آن‌ها، مجموعه قرار داشته باشد.



۳: اگر داشته باشیم:

$$A = \{-4, 10, a\} \quad , \quad B = \left\{0, \frac{3}{\lambda}, \frac{4}{3}, t, w\right\}$$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

$$-4 \in B \quad \square$$

$$\frac{4}{3} \notin B \quad \square$$

$$10 \in A \quad \square$$

$$a \notin A \quad \square$$

$$t \in B \quad \square$$

$$0 \notin A \quad \square$$



$$-4 \in B \quad \square \times$$

$$\frac{4}{3} \notin B \quad \square \times$$

$$10 \in A \quad \square \checkmark$$

$$a \notin A \quad \square \times$$

$$t \in B \quad \square \checkmark$$

$$0 \notin A \quad \square \checkmark$$

انواع مجموعه‌ها:

مجموعه‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف) مجموعه‌های پایان‌پذیر:



تعریف: مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن مشخص و قابل شمارش باشد، مجموعه‌ی پایان‌پذیر نامیده می‌شود. مانند مجموعه‌ی $A = \{-1, 4, 7, 12\}$ که تعداد عضوهای آن برابر با ۴ است.



نکته: تعداد عضوهای مجموعه‌ی پایان‌پذیری مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال، اگر مجموعه‌ی A سه عضو داشته باشد، می‌نویسیم: $n(A) = 3$.

ب) مجموعه‌های پایان‌ناپذیر:



تعریف: مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن نامشخص و غیرقابل شمارش باشد، مجموعه‌ی پایان‌ناپذیر نامیده می‌شود. مانند مجموعه‌ی $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ که مجموعه‌ی عددهای فرد را نشان می‌دهد و تعداد عضوهای آن نامشخص است.



نکته: در برخی از مجموعه‌های پایان‌پذیر و پایان‌ناپذیر، برای خودداری کردن از نوشتن تمامی عضوهای مجموعه، از سه نقطه (...) استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۱۰۰ را که مجموعه‌ای پایان‌پذیر است، می‌توانیم به‌صورت $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ و مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۵ را که مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است، می‌توانیم به‌صورت $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$ نشان دهیم.

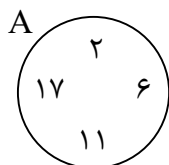
نمایش مجموعه‌ها:

برای نمایش یک مجموعه، سه روش وجود دارد:

الف) نمایش مجموعه‌ها با نوشتن اعضا: با فهرست کردن و نوشتن عضوهای یک مجموعه (و یا نوشتن تعدادی از عضوهای مجموعه‌های پایان‌پذیر که دارای نظم خاصی هستند) می‌توانیم آن مجموعه را نمایش دهیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد ۲۴ را با نوشتن اعضا به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

ب) نمایش مجموعه‌ها با نمودار ون: یک مجموعه‌ی پایان‌پذیر را می‌توانیم با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته‌ی بسته نمایش دهیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی $A = \{2, 6, 11, 17\}$ را با نمودار ون، به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:



ج) نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی: برای نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی، کافی است رابطه‌ی مشترک بین عضوهای مجموعه را به صورت یک عبارت ریاضی بنویسیم. به عنوان مثال، مجموعه‌ی $B = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$ را با نمادهای ریاضی، به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$B = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

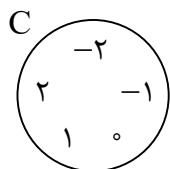
۴: مجموعه‌ی عددهای صحیح بین -3 و $+3$ را به سه صورت مختلف نمایش دهید و آن را C بنامید.



الف) نمایش با نوشتن عضوها:

$$C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

ب) نمایش با نمودار ون:



ج) نمایش با نمادهای ریاضی:

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\}$$

۵: مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.



الف) $A = \{0, 1, 2, \dots, 13\}$

ب) $B = \{-35, -34, -33, \dots\}$

ج) $C = \{2, 1, 0, -1, \dots\}$

د) $D = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$



الف) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 14\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 13\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{W} \mid x < 14\}$

ب) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -36\}$ یا $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -35\}$

ج) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 3\}$ یا $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 2\}$

د) $D = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\}$



۶. مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا نمایش دهید.

الف) $E = \{5k - 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$

ب) $F = \left\{ \frac{1}{k^2 + 1} \mid k \in \mathbb{Z}, -4 \leq k \leq 4 \right\}$

ج) $G = \{6 + 4k \mid k \in \mathbb{W}, k < 5\}$

د) $H = \left\{ \frac{k-1}{k+1} \mid k \in \mathbb{Z}, k > -1 \right\}$



الف) $E = \{5(1) - 2, 5(2) - 2, 5(3) - 2, 5(4) - 2, \dots\} = \{3, 8, 13, 18, \dots\}$

ب) $F = \left\{ \frac{1}{(-4)^2 + 1}, \frac{1}{(-3)^2 + 1}, \frac{1}{(-2)^2 + 1}, \frac{1}{(-1)^2 + 1}, \frac{1}{(0)^2 + 1}, \frac{1}{(1)^2 + 1}, \frac{1}{(2)^2 + 1}, \frac{1}{(3)^2 + 1}, \frac{1}{(4)^2 + 1} \right\}$
 $= \left\{ \frac{1}{17}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17} \right\} = \left\{ \frac{1}{17}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$

ج) $G = \{6 + 4(0), 6 + 4(1), 6 + 4(2), 6 + 4(3), 6 + 4(4)\} = \{6, 10, 14, 18, 22\}$

د) $H = \left\{ \frac{0-1}{0+1}, \frac{1-1}{1+1}, \frac{2-1}{2+1}, \frac{3-1}{3+1}, \dots \right\} = \left\{ -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \dots \right\}$

مجموعه‌های اعداد:

الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی: این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است که عضوهای آن از ۱ شروع می‌شود و تا بی‌نهایت ادامه دارد. مجموعه‌ی عددهای طبیعی را با \mathbb{N} و به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$



۹. مجموعه‌ی $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ ، مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$



۱۰. مجموعه‌ی $O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ ، مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

ب) مجموعه‌ی عددهای حسابی: این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است که عضوهای آن از صفر شروع می‌شود و تا بی‌نهایت ادامه دارد. مجموعه‌ی عددهای حسابی را با \mathbb{W} یا \mathbb{I} و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{W} \text{ یا } \mathbb{I} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

ج) مجموعه‌ی عددهای صحیح: این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است که عضوهای آن شامل عددهای مثبت، منفی و عدد صفر است. مجموعه‌ی عددهای صحیح را با \mathbb{Z} و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

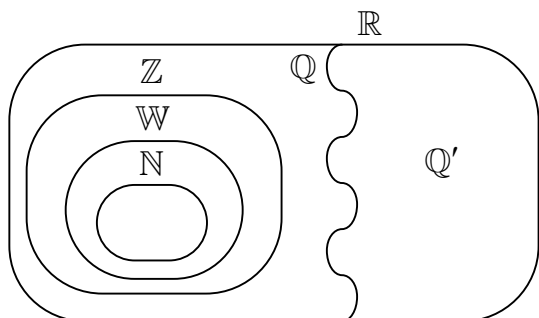
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

د) مجموعه‌ی عددهای گویا: این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است. از آنجاکه اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، لذا نمی‌توان این مجموعه را با اعضا مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه‌ی عددهای گویا را با نمادهای ریاضی و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

ه) مجموعه‌ی عددهای گنگ (اصم): این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است. عضوهای این مجموعه، عددهایی مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$ ، $0.1258\dots$ و π هستند که تعداد رقم‌های اعشاری آن‌ها بی‌شمار است و دارای دوره‌ی تناوب نیستند. به‌طور کلی می‌توان گفت: جذر عددهایی که مجذور کامل نیستند، گنگ است. مجموعه‌ی عددهای گنگ را با \mathbb{Q}' یا \mathbb{Q}^c نمایش می‌دهند.

و) مجموعه‌ی عددهای حقیقی: این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است و شامل عددهای گویا و عددهای گنگ است. مجموعه‌ی عددهای حقیقی را با \mathbb{R} نمایش می‌دهند.



۷: مجموعه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

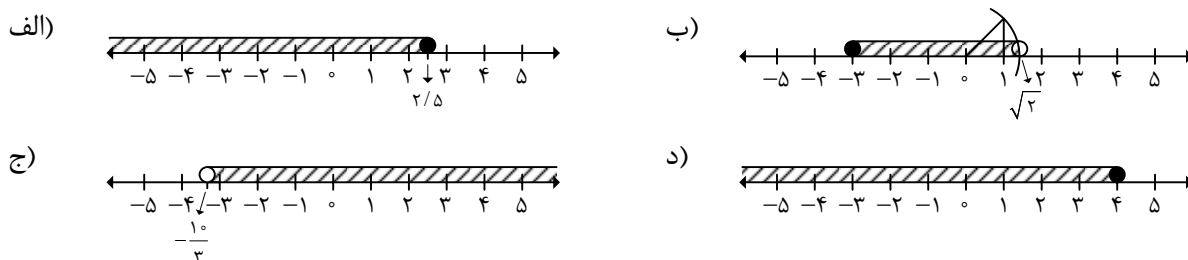


الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2/5\}$

ب) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < \sqrt{2}\}$

ج) $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{10}{3} \right\}$

د) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \geq x\}$



مجموعه‌ی تهی:



مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه‌ی تهی نامیده می‌شود و آن را با \emptyset یا $\{ \}$ نمایش می‌دهند.



باید دقت داشته باشیم که مجموعه‌ی تهی با مجموعه‌های $\{ \emptyset \}$ و $\{ \emptyset \}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، برابر نیست.

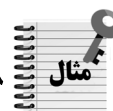
مجموعه‌های مساوی:



دو مجموعه‌ی A و B را مساوی گویند هرگاه هر عضو مجموعه‌ی A ، عضوی از مجموعه‌ی B و هر عضو مجموعه‌ی B ، عضوی از مجموعه‌ی A باشد. در این صورت می‌نویسیم: $A = B$.



اگر عضوی در مجموعه‌ی A باشد که در مجموعه‌ی B نباشد و یا عضوی در مجموعه‌ی B باشد که در A نباشد، در این صورت مجموعه‌ی A با مجموعه‌ی B برابر نیست و می‌نویسیم: $A \neq B$.



۸. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو مجموعه‌ی $A = \{-4, 5, 3a - 1\}$ و $B = \{-2b, 11, 5\}$ با هم مساوی باشند.



برای این که دو مجموعه‌ی A و B با هم مساوی باشند، باید داشته باشیم: $3a - 1 = 11$ و $-2b = -4$. پس

داریم:

$$3a - 1 = 11 \Rightarrow 3a = 11 + 1 \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{3} = 4$$

$$-2b = -4 \Rightarrow b = \frac{-4}{-2} = 2$$

زیرمجموعه:



تعریف اگر هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد، می‌گوییم مجموعه A زیرمجموعه‌ی مجموعه B است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$. به‌عنوان مثال، اگر داشته باشیم $E = \{3, 4, 5\}$ و $F = \{1, 2, \dots, 10\}$ ، در این صورت داریم: $E \subseteq F$.



تذکر اگر حداقل یک عضو در مجموعه A باشد که در مجموعه B نباشد، می‌گوییم مجموعه A زیرمجموعه‌ی مجموعه B نیست و می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$.



نکته ۱۱: هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است؛ یعنی اگر A مجموعه‌ی دلخواهی باشد، در این صورت داریم:

$$A \subseteq A$$



نکته ۱۲: مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی دلخواهی مانند A است. به‌عبارت دیگر:

$$\emptyset \subseteq A$$



نکته ۱۳: از نمادهای \subseteq یا $\not\subseteq$ زمانی استفاده می‌شود که در سمت راست و چپ این نمادها، مجموعه قرار داشته باشد؛ به‌عبارت دیگر، یکی از حروف بزرگ انگلیسی و یا علامت آکولاد که نشان‌دهنده‌ی مجموعه است، باشد.



نکته ۱۴: همواره داریم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$



مثال ۹: مجموعه‌ی $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ را در نظر بگیرید:

(الف) زیرمجموعه‌ای از M بنویسید که عضوهای آن بر ۳ بخش‌پذیر باشند و آن را A بنامید.

(ب) زیرمجموعه‌ای از M بنویسید که عضوهای آن مضرب ۴ باشند و آن را B بنامید.

(ج) زیرمجموعه‌ای از M بنویسید که عضوهای آن مضرب ۱۲ باشند و آن را C بنامید.

د) زیرمجموعه‌ای از M بنویسید که عضوهای آن عدد اول باشند و آن را D بنامید.

ه) در داخل \square یکی از نمادهای \in ، \notin ، \subseteq و $\not\subseteq$ را بگذارید.

$$۱۶ \square A$$

$$C \square B$$

$$D \square M$$

$$۱۷ \square D$$

$$B \square D$$

$$۱۵ \square M$$

$$\{۸, ۱۲\} \square C$$

$$۱۴ \square B$$



$$A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸\}$$

(الف)

$$B = \{۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰\}$$

(ب)

$$C = \{۱۲\}$$

(ج)

$$D = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹\}$$

(د)

(ه)

$$۱۶ \square A$$

$$C \square B$$

$$D \square M$$

$$۱۷ \square D$$

$$B \square D$$

$$۱۵ \square M$$

$$\{۸, ۱۲\} \square C$$

$$۱۴ \square B$$

روش نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

برای نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه، می‌توانیم با شروع از خود مجموعه و حذف تک‌تک عضوهای آن در همه‌ی حالت‌هایی که امکان‌پذیر است، تمام زیرمجموعه‌های آن مجموعه را بنویسیم.

۱۵: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی، برابر با ۲^n است.



۱۰: مجموعه‌ی $A = \{-۲, ۳, ۸\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ آن‌ها را بنویسید.



$$۲^۳ = ۸ = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$$

$$\{-۲, ۳, ۸\} : \text{زیرمجموعه‌های سه عضوی}$$

$$\{-۲, ۳\}, \{-۲, ۸\}, \{۳, ۸\} : \text{زیرمجموعه‌های دو عضوی}$$

$$\{-۲\}, \{۳\}, \{۸\} : \text{زیرمجموعه‌های یک عضوی}$$

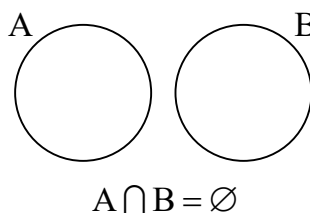
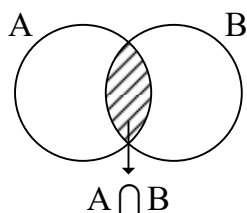
$$\{ \} : \text{زیرمجموعه‌های هیچ عضوی}$$

اعمال روی مجموعه‌ها:

الف) اشتراک دو مجموعه: مجموعه‌ی عضوهایی که به هر دو مجموعه‌ی A و B تعلق داشته باشند، اشتراک دو مجموعه‌ی A و B نامیده می‌شود که آن را با $A \cap B$ نمایش می‌دهند. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

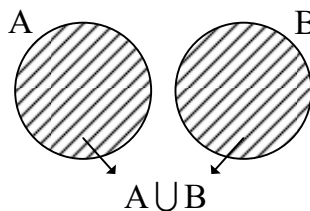
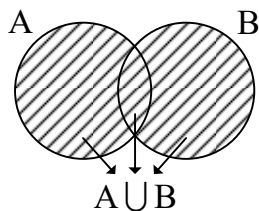
نمودار ون اشتراک دو مجموعه‌ی A و B در دو حالت ممکن به صورت زیر است:



ب) اجتماع دو مجموعه: مجموعه‌ی عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه‌ی A و B تعلق داشته باشند، اجتماع دو مجموعه‌ی A و B نامیده می‌شود که آن را با $A \cup B$ نمایش می‌دهند. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

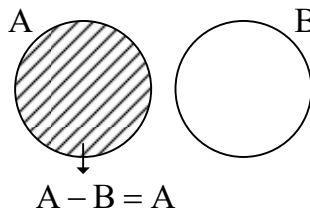
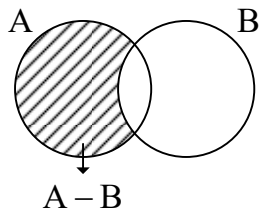
نمودار ون اجتماع دو مجموعه‌ی A و B در دو حالت ممکن به صورت زیر است:



ج) تفاضل دو مجموعه: مجموعه‌ی $A - B$ (منهای B) مجموعه‌ی عضوهایی از مجموعه‌ی A است که در مجموعه‌ی B نمی‌باشد. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

نمودار ون $A - B$ در دو حالت ممکن به صورت زیر است:



نکته ۱۶: برای هر دو مجموعه‌ی A و B داریم:



$$A - B \neq B - A \quad ; \quad A \neq B$$



۱۱: اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ و $B = \{3, 6, 8, 9, 12, 15\}$ ، عضوهای مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ را بنویسید.



$$A \cup B = \{1, 2, \dots, 10, 12, 15\}$$

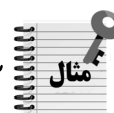
$$A \cap B = \{3, 6, 8, 9\}$$

$$A - B = \{1, 2, 4, 5, 7, 10\}$$



۱۷: همواره داریم:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$



۱۲: طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' =$

ب) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' =$

ج) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} =$

د) $\mathbb{W} \cup \mathbb{Q} =$

ه) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} =$

و) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} =$



الف) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

ب) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

ج) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$

د) $\mathbb{W} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

ه) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$

و) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\}$

نکات مهم در مجموعه‌ها:



۱۸: در اشتراک دو مجموعه همواره داریم:

۱) $A \cap B = B \cap A$

۲) $A \cap A = A$

۳) $A \cap \emptyset = \emptyset$



۱۹: در اجتماع دو مجموعه همواره داریم:

$$۱) A \cup B = B \cup A$$

$$۲) A \cup A = A$$

$$۳) A \cup \emptyset = A$$



۲۰: در تفاضل دو مجموعه همواره داریم:

$$۱) (A - B) \subseteq A$$

$$۲) (B - A) \subseteq B$$



۲۱: همواره داریم:

$$۱) (A \cap B) \subseteq A$$

$$۲) (A \cap B) \subseteq B$$

$$۳) (A \cap B) \subseteq (A \cup B)$$

$$۴) A \subseteq (A \cup B)$$

$$۵) B \subseteq (A \cup B)$$

الگو:

در برخی مسئله‌ها، بین اعداد و شکل‌ها رابطه‌ی مشخصی وجود دارد. کشف این رابطه به حل مسئله و به‌دست آوردن جواب کمک می‌کند. یکی از روش‌هایی که در کشف رابطه به ما کمک می‌کند، الگویابی است.

انواع الگوها:

الگوها بر دو نوع هستند:

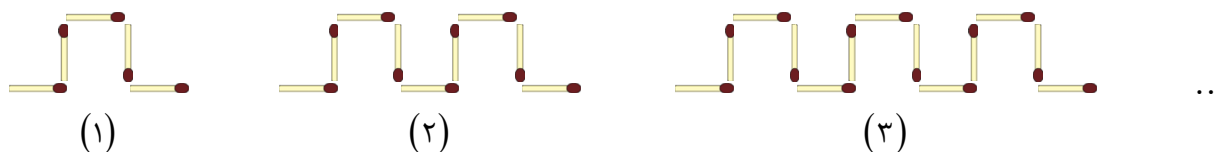
۱) الگوهای عددی

۲) الگوهای هندسی

به مثال زیر توجه کنید:



۱۳: با توجه به شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌ها را در شکل n ام تعیین کنید. با توجه به الگوی به‌دست آمده، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل دویستم را به‌دست آورید.



تعداد چوب‌کبریت‌ها در هر یک از شکل‌ها به‌صورت زیر است:

$$5, 9, 13, 17, \dots$$

$$\begin{array}{cccc} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \\ +4 & +4 & +4 & \end{array}$$

این اعداد را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$(4 \times 1) + 1, (4 \times 2) + 1, (4 \times 3) + 1, (4 \times 4) + 1, \dots$$

رابطه‌ی بین شماره‌ی شکل و تعداد چوب‌کبریت‌ها به‌صورت زیر است:

$$+1 \text{ (شماره‌ی شکل} \times 4) = \text{تعداد چوب‌کبریت‌ها}$$

بنابراین تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل n ام برابر است با: $4n + 1$.

اکنون با استفاده از رابطه‌ی به‌دست آمده داریم:

$$\text{تعداد چوب‌کبریت‌های شکل دویستم} = (4 \times 200) + 1 = 800 + 1 = 801$$

در سال تحصیلی آینده خواهیم آموخت:

بازها:



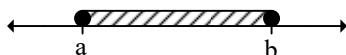
زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} را که شامل تمام عددهای حقیقی بین دو عدد مشخص هستند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامند.

برای نمایش مجموعه‌ی نقاط روی محور عددهای حقیقی، از نماد بازه (فاصله) استفاده می‌کنیم. در این صورت سه حالت مختلف به‌وجود می‌آید:

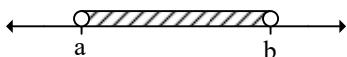
(الف) بازه‌ی بسته: مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت

$[a, b]$ که بازه‌ی بسته از a تا b نامیده می‌شود، نشان می‌دهیم. این بازه‌ی بسته را روی محور عددهای حقیقی به‌صورت

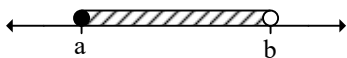
زیر نمایش می‌دهیم:



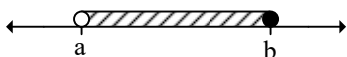
ب) بازه‌ی باز: مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت (a, b) که بازه‌ی باز بین a و b نامیده می‌شود، نشان می‌دهیم. این بازه‌ی باز را روی محور عددهای حقیقی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



ج) نیم‌باز: مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $[a, b)$ که نیم‌باز از راست نامیده می‌شود، نشان می‌دهیم. این نیم‌باز را روی محور عددهای حقیقی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



اکنون مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $(a, b]$ که نیم‌باز از چپ نامیده می‌شود، نشان می‌دهیم. این نیم‌باز را روی محور عددهای حقیقی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



نکته ۲۲: مجموعه‌ی عددهای حقیقی \mathbb{R} را به صورت $(-\infty, +\infty)$ نیز نمایش می‌دهند. باید توجه داشته باشیم که ∞ (بی‌نهایت) عدد نیست، بلکه برای نمایش بی‌نهایت کوچک از $-\infty$ و برای نمایش بی‌نهایت بزرگ از $+\infty$ استفاده می‌کنند.

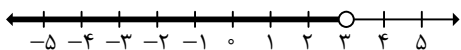
نکته ۲۳: بازه‌های $(a, +\infty)$ و $[a, +\infty)$ از سمت راست، نامحدود می‌باشند و بازه‌های $(-\infty, b)$ و $(-\infty, b]$ از سمت چپ، نامحدود می‌باشند.

مثال ۱۴: هریک از مجموعه‌های زیر را روی محور عددهای حقیقی نمایش دهید و به صورت بازه بنویسید.

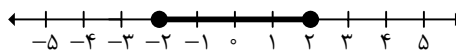
- الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ ب) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$
 ج) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq -1\}$ د) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$

جواب

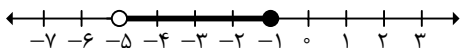
الف) $A = (-\infty, 3)$



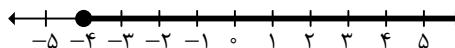
ب) $B = [-2, 2]$



ج) $C = (-5, -1]$



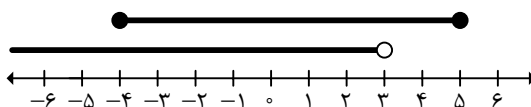
د) $D = [-4, +\infty)$



۱۵: اجتماع و اشتراک دو بازه‌ی $[-4, 5]$ و $(-\infty, 3)$ را به دست آورید.

مثال

جواب



$$[-4, 5] \cup (-\infty, 3) = (-\infty, 5]$$

$$[-4, 5] \cap (-\infty, 3) = [-4, 3)$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

تعریف: مجموعه‌هایی را که تعداد عضوهای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامند.

تعریف

تذکر: مجموعه‌های متناهی همان مجموعه‌های پایان‌پذیر هستند.

تذکر

تعریف: مجموعه‌هایی را که تعداد عضوهای آن‌ها از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است (بی‌شمار عضو دارند)،

تعریف

مجموعه‌های نامتناهی می‌نامند.

تذکر: مجموعه‌های نامتناهی همان مجموعه‌های پایان‌ناپذیر هستند.

تذکر

مجموعه‌ی مرجع:

تعریف: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعه‌های آن باشند، مجموعه‌ی مرجع

تعریف

می‌نامند و آن را با U یا M نمایش می‌دهند.

تذکر: مجموعه‌ی مرجع را با نمودار وِن، معمولاً به صورت یک مستطیل نمایش می‌دهند.

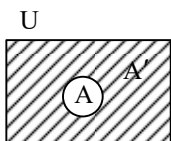
تذکر

U



متمم یک مجموعه:

تعریف هرگاه U مجموعه‌ی مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم A می‌نامند و آن را با نماد A' نشان می‌دهند. به عبارت دیگر، A' شامل عضوایی از U است که در A نیستند.



نکته ۲۴: اگر A یک مجموعه‌ی دلخواه و U مجموعه‌ی مرجع باشد، در این صورت داریم:

$$A \cap A' = \emptyset$$

نکته ۲۵: متمم متمم هر مجموعه، برابر با خود آن مجموعه است. یعنی:

$$(A')' = A$$

نکته ۲۶: همواره داریم:

$$U' = \emptyset$$

$$\emptyset' = U$$

نکته ۲۷: متمم‌های دو مجموعه‌ی مساوی، با هم مساوی‌اند.

مثال ۱۶: اگر $U = \{1, 2, \dots, 30\}$ مجموعه‌ی مرجع و A مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۳ باشد و داشته باشیم

$A \subseteq M$ ، مجموعه‌ی A' را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29\}$$

جواب

دو مجموعه‌ی جدا از هم:



تعریف به دو مجموعه‌ی ناتهی مانند A و B که عضو مشترکی نداشته باشند، دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا) می‌گویند. مانند:

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ و } B \text{ دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.}$$

به‌عنوان مثال، دو مجموعه‌ی $A = \{1, 2\}$ و $B = \{3, 4\}$ جدا از هم هستند. زیرا: $A \cap B = \emptyset$.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه:

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



تذکر اگر $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$n(A \cap B) = 0$$



مثال ۱۷: اگر داشته باشیم $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$ ، مطلوب است تعیین

$$n(A \cup B)$$



$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(A) = 8$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(B) = 6$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 + 6 - 4 = 10$$

الگوهای خطی:



تعریف به‌طور کلی الگوهایی را که جمله‌ی عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b عددهای حقیقی دلخواه و ثابت هستند.



۱۸: در یک الگوی خطی، جملات سوم و هشتم به‌ترتیب برابر با ۱۷ و ۵۲ است. جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.



$$t_3 = 17 \Rightarrow a(3) + b = 17 \Rightarrow 3a + b = 17 \quad (1)$$

$$t_8 = 52 \Rightarrow a(8) + b = 52 \Rightarrow 8a + b = 52 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} 3a + b = 17 \\ 8a + b = 52 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -3a - b = -17 \\ 8a - b = 52 \end{cases} \\ &\underline{\hspace{10em}} \\ \Delta a = 35 &\Rightarrow a = 7 \quad (*) \end{aligned}$$

$$3a + b = 17 \quad (*) \Rightarrow 3(7) + b = 17 \Rightarrow 21 + b = 17 \Rightarrow b = -4$$

با قرار دادن مقدارهای a و b در $t_n = an + b$ ، جمله‌ی عمومی الگو به دست می‌آید. به عبارت دیگر:

$$t_n = an + b \xrightarrow{a=7, b=-4} t_n = 7n - 4$$

دنباله:

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامند. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.



ممکن است جملات دنباله فاقد الگو باشند.



جمله‌ی عمومی دنباله:

جمله‌ی عمومی دنباله را جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند. جمله‌ی عمومی یک دنباله را معمولاً با t_n یا a_n



یا u_n نمایش می‌دهند.

۱۹: پنج جمله‌ی اول هریک از دنباله‌های زیر را که جمله‌ی عمومی آن‌ها داده شده است، بنویسید.



الف) $a_n = 2n - 5n^2$

ب) $t_n = \frac{n+3}{2n-1}$



الف)

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2(1) - 5(1)^2 = -3 \\ a_2 &= 2(2) - 5(2)^2 = -16 \\ a_3 &= 2(3) - 5(3)^2 = -39 \\ a_4 &= 2(4) - 5(4)^2 = -72 \\ a_5 &= 2(5) - 5(5)^2 = -115 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3, -16, -39, -72, -115$$

ب)

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{1+3}{2(1)-1} = \frac{4}{1} = 4 \\ t_2 &= \frac{2+3}{2(2)-1} = \frac{5}{3} \\ t_3 &= \frac{3+3}{2(3)-1} = \frac{6}{5} \\ t_4 &= \frac{4+3}{2(4)-1} = \frac{7}{7} = 1 \\ t_5 &= \frac{5+3}{2(5)-1} = \frac{8}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4, \frac{5}{3}, \frac{6}{5}, 1, \frac{8}{9}$$

دنباله‌ی حسابی:



تعریف دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (به جز جمله‌ی اول) از اضافه شدن مقداری ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید، دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود. این مقدار ثابت را قدرنسبت جملات دنباله‌ی حسابی می‌نامند.

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با t_1 ، قدرنسبت را با d و تعداد جملات را با n نمایش دهیم، جمله‌ی عمومی دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$



مثال ۲۰: اگر جمله‌ی دوم یک دنباله‌ی حسابی ۸ و جمله‌ی دوازدهم آن -42 باشد، جمله‌ی عمومی دنباله را

به دست آورید.



$$t_2 = 8 \Rightarrow t_1 + (2-1)d = 8 \Rightarrow t_1 + d = 8 \quad (1)$$

$$t_{12} = -42 \Rightarrow t_1 + (12-1)d = -42 \Rightarrow t_1 + 11d = -42 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} t_1 + d = 8 \\ t_1 + 11d = -42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - d = -8 \\ t_1 + 11d = -42 \end{cases}$$

$$10d = -50 \Rightarrow d = -5 \quad (*)$$

$$t_1 + d = 8 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} t_1 + (-5) = 8 \Rightarrow t_1 = 13 \quad (**)$$

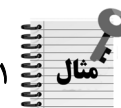
$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow{(*),(**)} t_n = 13 + (n-1)(-5) \Rightarrow t_n = -5n + 18$$

دنباله‌ی هندسی:



تعریف دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (به جز جمله‌ی اول) با ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله‌ی قبلی به دست می‌آید، دنباله‌ی هندسی نامیده می‌شود. این مقدار ثابت را قدرنسبت جملات دنباله‌ی هندسی می‌نامند. اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی را با t_1 ، قدرنسبت را با r و تعداد جملات را با n نمایش دهیم، جمله‌ی عمومی دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$



۲۱: جملات سوم و پنجم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۲ و ۸ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.



$$t_3 = 2 \Rightarrow t_1 r^{3-1} = 2 \Rightarrow t_1 r^2 = 2 \quad (1)$$

$$t_5 = 8 \Rightarrow t_1 r^{5-1} = 8 \Rightarrow t_1 r^4 = 8 \quad (2)$$

رابطه‌ی (۲) را بر رابطه‌ی (۱) تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{t_1 r^4}{t_1 r^2} = \frac{8}{2} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2 \quad (*)$$

$$t_1 r^2 = 2 \Rightarrow t_1 (\pm 2)^2 = 2 \Rightarrow 4t_1 = 2 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$$

اگر $r = 2$ ، آن‌گاه دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$$

اگر $r = -2$ ، آن‌گاه دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \dots$$



توجه شرح کامل مطالب این فصل در کتاب جامع ریاضی (۱) پایه دهم بیان شده است.



۱- متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی عددهای اول

ب) مجموعه‌ی عددهای اعشاری بین $0/1$ و $0/3$

ج) مجموعه‌ی عددهای طبیعی دویست رقمی

۲- اگر داشته باشیم $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 9\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ و $C = \{1, 3, 5, 6, 8\}$ ، مجموعه‌ی $(A \cup B) - (A \cap C)$ را با اعضا مشخص کنید.

۳- اگر $M = \{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و داشته باشیم $A = \{8k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ، مجموعه‌ی A' را با نوشتن اعضا و علائم ریاضی مشخص کنید.

۴- جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی ۱ و جمله‌ی دوازدهم آن ۱۵ است. جمله‌ی عمومی این دنباله را به دست آورید.

۵- اگر یکی از جمله‌های یک دنباله‌ی هندسی ۳ و جمله‌ی بعدی ۴ باشد، دو جمله‌ی قبل از ۳ را تعیین کنید.



دانش‌آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های بیشتر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.