

ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه پیشرفته

تألیف: دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان

نظارت عالی: علی خزایی

عنوان و نام پدیدآور : ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه پیشرفته
مشخصات نشر : تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری : ۱۳۸ص؛ ۲۲×۲۹ س.م.
شابک : 978-600-7903-95-7
وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
یادداشت : چاپ دوم.
شناسه افزوده : خزائی، علی، ۱۳۴۸ - ، ناظر
شناسه افزوده : کانون ریاضیدانان زمان
شماره کتابشناسی ملی : ۴۸۳۶۶۰۹

نام کتاب:	ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه پیشرفته
تألیف:	دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان
شابک:	۹۷۸-۶۰۰-۷۹۰۳-۹۵-۷
	ISBN:978-600-7903-95-7
نوبت چاپ:	چاپ دوم - ۱۳۹۶
تیراژ:	۱۰۰۰ جلد

تعداد صفحات: ۱۳۸ صفحه

قیمت: ۲۵۰۰۰ تومان



ناشر: ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز بخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)

فروشگاه دائمی: تهران - میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی - نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳

حق چاپ برای کانون ریاضیدانان زمان محفوظ است.

کپی برداری و تکثیر هر قسمت از کتاب بدون اجازه کتبی از کانون ریاضیدانان زمان پیگرد قانونی دارد.

پیش‌گفتار

گسترده‌گی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف از جمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری، افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه‌ی امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به‌عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

۱) **مجموعه کتاب‌های «تابستانه»:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

۲) **مجموعه کتاب‌های «مقدماتی»:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۳) **مجموعه کتاب‌های «پیشرفته»:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

۴) **مجموعه کتاب‌های «جامع»:** این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و سؤالات تشریحی و چهارگزینه‌ای بدون پاسخ در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۵) مجموعه کتاب‌های «تیزهوشان»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول پیشنهاد می‌گردد.

۶) مجموعه کتاب‌های «موضوعی»: این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

۷) مجموعه کتاب‌های «یکی من، یکی تو»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤالات «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یکدیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به‌ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

۸) مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به‌صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته (برای مقاطع ابتدایی و متوسطه اول) و در دو شکل تشریحی و چهارگزینه‌ای (برای مقطع متوسطه دوم) در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمونی از آن فصل به‌عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش فرهنگ ریاضی

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

حضرت علی (ع):

دانشی که قرین فهم نباشد، نفعی ندارد. خواندنی که توأم با تامل نباشد، سودمند نیست. عبادتی که بی تفکر باشد، خیری ندارد.

خداوند بزرگ را سپاس می‌گوییم که نعمت اندیشیدن را به همگان عطا فرمود تا در پرتو آن، انسان مسیر صحیح زیستن را آموخته و به دیگران نیز بیاموزد.

یکی از راهبردهای مهم یادگیری، آموزش دقیق مفاهیم و انجام تمرین‌های متناسب با اصول یادگیری و تکرار آن است. در این راستا، داشتن منبع مناسب برای یادگیری و درک بیش‌تر و همچنین نمونه سؤالات مناسب و متنوع برای تمرین، می‌تواند یکی از عوامل مهم موفقیت در یادگیری و پیشرفت علمی دانش‌آموزان باشد.

کتابی که در مقابل چشمان جستجوگر شما قرار دارد، بر مبنای نظام آموزشی کانون ریاضیدانان زمان و در جهت تکمیل کتاب‌های زنجیروار آن (تابستانه ← مقدماتی ← پیشرفته) که متناسب با مفاهیم و مطالب کتاب درسی ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه است، همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی به شرح زیر گردآوری شده است:

* تدریس در سطح پیشرفته با روشی کلاسیک و دسته‌بندی و تشریح کامل مطالب

* ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب

* ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی

* تمرین‌های پایان هر فصل

امید است این کتاب، کمک شایانی به موفقیت همه‌ی معلمین گرامی و دانش‌آموزان عزیز بنماید.

دپارتمان متوسطه اول

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

۱	فصل اول: «راهبردهای حل مسئله»
۲	راهبرد رسم شکل
۳	راهبرد الگوسازی
۴	راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب
۶	راهبرد الگویابی
۸	راهبرد حدس و آزمایش
۱۰	راهبرد زیرمسئله
۱۱	راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر
۱۲	راهبرد روش‌های نمادین
۱۵	تمرین‌های فصل اول
۱۷	فصل دوم: «عددهای صحیح»
۱۸	جمع و تفریق عددهای صحیح به روش مختصرنویسی
۲۳	خواص جمع عددهای صحیح
۲۳	خاصیت تعویض‌پذیری
۲۳	خاصیت جمع هر عدد صحیح با عدد صفر
۲۳	خاصیت جمع هر عدد صحیح با قرینه‌اش
۲۳	خاصیت شرکت‌پذیری
۲۳	خواص ضرب عددهای صحیح
۲۳	خاصیت تعویض‌پذیری
۲۴	خاصیت ضرب هر عدد صحیح در عدد ۱
۲۴	خاصیت ضرب هر عدد صحیح در معکوس آن
۲۴	خاصیت ضرب هر عدد صحیح در عدد صفر
۲۴	خاصیت شرکت‌پذیری
۲۴	خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع و تفریق
۲۶	مجموع دنباله‌ی عددهای صحیح با فاصله‌های مساوی
۲۸	قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر با استفاده از محور عددهای صحیح
۲۹	عمل دوتایی در عددهای صحیح
۳۰	تمرین‌های فصل دوم

۳۱	فصل سوم: «جبر و معادله»
۳۲	حل مسائل مهم جبر
۳۵	حل مسائل مهم معادله
۴۱	تمرین‌های فصل سوم
۴۳	فصل چهارم: «هندسه و استدلال»
۴۴	روش یافتن تعداد کل پاره‌خط‌های موجود روی یک خط راست
۴۴	روش یافتن تعداد کل نیم‌خط‌های موجود روی یک خط راست
۴۷	روش یافتن تعداد قطرهای n ضلعی
۴۸	روش یافتن تعداد کل زاویه‌ها با n نیم‌خط دارای رأس مشترک
۵۰	دو زاویه‌ی مجاور
۵۱	دو زاویه‌ی مجانب
۵۲	حل مثال‌های مهم زاویه
۵۳	اثبات‌های مهم در زاویه
۵۴	چندضلعی‌ها
۵۴	روش به‌دست آوردن مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
۵۵	روش به‌دست آوردن اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی یک چندضلعی منتظم
۵۵	زاویه‌ی خارجی
۵۶	روش یافتن زاویه‌ی بین عقربه‌ی ساعت شمار و دقیقه شمار
۵۷	روش یافتن تعداد کل مثلث‌ها با n نقطه‌ی غیر واقع روی یک خط راست
۵۸	حل مسائل مهم رسم مثلث
۵۹	حل مسائل مهم تبدیلات هندسی (انتقال، تقارن، دوران)
۶۲	حل مسائل مهم شکل‌های مساوی (هم‌نهشت)
۶۵	تمرین‌های فصل چهارم
۶۷	فصل پنجم: «شمارنده‌ها و اعداد اول»
۶۸	حل مسائل مهم شمارنده‌ها و اعداد اول
۷۱	روش تعیین اول بودن یک عدد
۷۲	عدد مرکب
۷۲	قواعد بخش‌پذیری
۷۷	روش تقسیم‌های متوالی برای تعیین ب.م.م دو عدد
۷۸	روش دیگر تجزیه‌ی یک عدد به شمارنده‌های اول
۷۹	روش تعیین تعداد شمارنده‌های اول یک عدد

۸۰	روش تعیین تعداد کل شمارنده‌های مثبت یک عدد
۸۱	دو عدد نسبت به هم اول (دو عدد متباین)
۸۲	تمرین‌های فصل پنجم
۸۳	فصل ششم: «سطح و حجم»
۸۴	حل مسائل مهم سطح و حجم
۹۱	تمرین‌های فصل ششم
۹۳	فصل هفتم: «توان و جذر»
۹۴	حل مسائل مهم توان
۹۷	نکات مهم توان
۹۷	قاعده‌ی توان در توان
۹۸	مقایسه‌ی عددهای توان‌دار
۹۸	مقایسه‌ی عددهای توان‌دار با پایه‌های مساوی
۹۸	مقایسه‌ی عددهای توان‌دار با توان‌های مساوی
۹۹	حل برخی مثال‌های مهم توان
۱۰۲	کاربردهای روش تجزیه در توان
۱۰۲	روش تعیین تعداد شمارنده‌های طبیعی یک عدد
۱۰۲	روش تعیین حاصل ضرب شمارنده‌های یک عدد
۱۰۳	روش تعیین م.م.ب و ک.م.م دو عدد
۱۰۴	روش محاسبه‌ی رقم یکان یک عدد توان‌دار
۱۰۴	عددهای توان‌داری که رقم یکان پایه‌ی آن‌ها ۰ یا ۱ یا ۵ یا ۶ باشد
۱۰۴	عددهای توان‌داری که رقم یکان پایه‌ی آن‌ها ۴ باشد
۱۰۴	عددهای توان‌داری که رقم یکان پایه‌ی آن‌ها ۹ باشد
۱۰۴	عددهای توان‌داری که رقم یکان پایه‌ی آن‌ها ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ باشد
۱۰۶	روش تعیین مجذور کامل یا مکعب کامل بودن یک عدد به کمک تجزیه
۱۰۶	فرمول‌های مهم توان
۱۰۶	مجموع مربعات اعداد طبیعی
۱۰۷	مجموع مکعبات اعداد طبیعی
۱۰۷	حل مسائل مهم جذر
۱۰۸	نکات مهم جذر
۱۱۱	تمرین‌های فصل هفتم

۱۱۳	فصل هشتم: «بردار و مختصات»
۱۱۴	تفریق متناظر با بردار صحیح
۱۱۷	نیم‌ساز ناحیه‌های دستگاه مختصات
۱۱۸	نکات مهم بردار و مختصات
۱۲۲	مختصات وسط یک پاره‌خط
۱۲۳	شرط موازی بودن و عمود بودن دو بردار
۱۲۴	ضرب یک عدد در مختصات یک نقطه (یا یک بردار)
۱۲۵	حل معادله‌های مختصاتی
۱۲۷	تمرین‌های فصل هشتم
۱۲۹	فصل نهم: «آمار و احتمال»
۱۳۰	حل مسائل مهم آمار
۱۳۴	حل مسائل مهم احتمال
۱۳۸	تمرین‌های فصل نهم

سیمای فصل اول

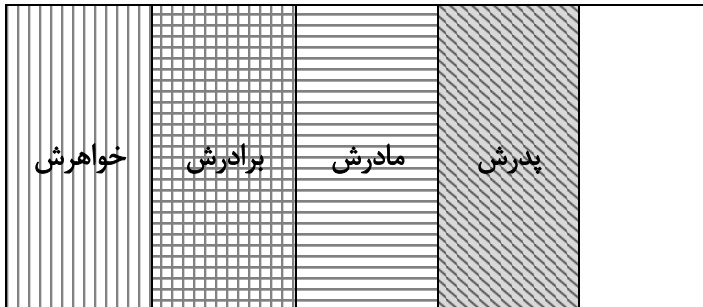


در کتاب مقدماتی، با مطالب مربوط به این فصل آشنا شدیم. اکنون در ادامه‌ی آن مطالب و در سطح پیشرفته‌تر، به حل مثال‌های مهم و بیان مفاهیم جدیدی می‌پردازیم:

۱- راهبرد رسم شکل:

مثال ۱: مریم $\frac{1}{5}$ از پولش را به خواهرش، $\frac{1}{4}$ باقی‌مانده را به برادرش، $\frac{1}{3}$ باقی‌مانده را به مادرش و $\frac{1}{4}$ باقی‌مانده را به پدرش داد.

چه کسری از پول مریم برای خودش باقی مانده است؟



همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده

می‌کنیم، $\frac{1}{5}$ از شکل مربوط به قسمت باقی‌مانده

است. بنابراین $\frac{1}{5}$ از پول مریم برای خودش باقی

مانده است.

مثال ۲: در یک مجتمع آموزشی، دانش‌آموزان آن را به پنج قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. دو قسمت آن در رشته‌ی

انسانی تحصیل می‌کنند. اگر باقی‌مانده را به پنج قسمت مساوی تقسیم کنیم، سه قسمت آن در رشته‌ی تجربی تحصیل می‌کنند. مجدداً اگر باقی‌مانده را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم، یک قسمت آن در رشته‌ی ریاضی تحصیل می‌کنند و بقیه‌ی دانش‌آموزان در رشته‌ی فنی و حرفه‌ای تحصیل می‌کنند. اگر دانش‌آموزان رشته‌ی فنی و حرفه‌ای ۴۵ نفر باشند، این مجتمع آموزشی چند دانش‌آموز دارد؟

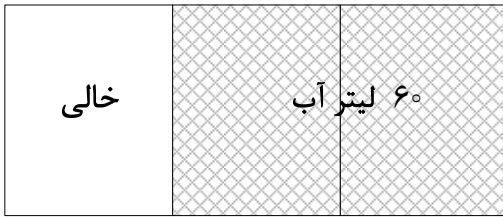
قسمت باقی‌مانده‌ی شکل $\frac{3}{25}$ کل شکل است. بنابراین داریم:



$$\frac{3}{25} = \frac{45}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \times 45}{3} = 375$$

تعداد کل دانش‌آموزان ۳۷۵

مثال ۳: ثلث یک منبع آب خالی است. اگر این منبع ۶۰ لیتر آب داشته باشد، گنجایش کل این منبع چند لیتر است؟



جواب باتوجه به شکل، گنجایش $\frac{2}{3}$ منبع ۶۰ لیتر است و از آنجا گنجایش $\frac{1}{3}$ منبع ۳۰ لیتر خواهد بود. بنابراین گنجایش کل منبع برابر است با:

$$۶۰ + ۳۰ = ۹۰ \text{ لیتر}$$

۲- راهبرد الگوسازی:

مثال ۴: با رقم‌های ۶، ۵ و ۰ تمام عددهای سه رقمی زوج را بنویسید. (بدون تکرار ارقام)

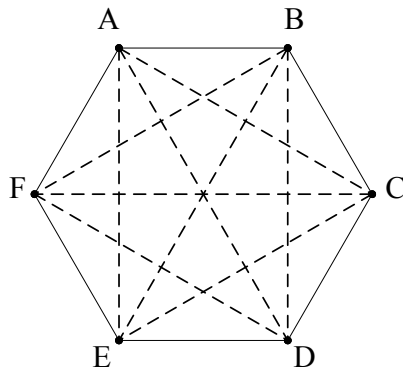
صدگان	دهگان	یکان
۵	۶	۰
۶	۵	۰
۵	۰	۶

جواب در جدول مقابل، یکان را انتخاب کرده و دهگان و صدگان را تغییر می‌دهیم. باید توجه داشته باشیم که رقم صفر در مرتبه‌ی صدگان نمی‌تواند قرار گیرد. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، ۳ عدد سه رقمی می‌توان نوشت که عبارتند از:

$$۵۶۰ - ۶۵۰ - ۵۰۶$$

مثال ۵: تعداد قطرهای یک شش‌ضلعی را به دست آورید.

جواب ابتدا از هریک از رأس‌های شش‌ضلعی، قطرهای رسم شده را می‌نویسیم:



- A از رأس : AE-AD-AC
- B از رأس : BF-BE-BD
- C از رأس : CA-CF-CE
- D از رأس : DF-DA-DB
- E از رأس : EA-EB-EC
- F از رأس : FB-FC-FD

با کمی دقت درمی‌یابیم که بعضی از قطرها به صورت تکراری نوشته شده‌اند. به عنوان مثال، قطرهای AD، AE، DF، ... دو بار نوشته شده‌اند. پس باید قطرهای تکراری را حذف کنیم. با حذف این قطرها و دقت لازم درمی‌یابیم که شش‌ضلعی ABCDEF، ۹ قطر دارد که عبارتند از:

$$AC-AD-AE-BF-BE-BD-CF-CE-DF$$

مثال ۶: دو عدد طبیعی بیابید که حاصل ضرب آن‌ها ۴۲ و حاصل جمع آن‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن باشد.

عدد اول	عدد دوم	حاصل جمع
۱	۴۲	۴۳ *
۲	۲۱	۲۳
۳	۱۴	۱۷
۶	۷	۱۳

حالت‌های ممکن را در جدول مقابل قرار می‌دهیم (حالت‌های

تکراری را نمی‌نویسیم).

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم دو عدد موردنظر، عددهای ۱ و ۴۲ می‌باشند که بیش‌ترین حاصل جمع را دارند.



مثال ۷: چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که بر ۵ و ۶ بخش‌پذیر می‌باشند؟

یکان	دهگان
۰	۳
۰	۶
۰	۹

عددی که بر ۵ و ۶ بخش‌پذیر است، بر 30 نیز بخش‌پذیر

است. همان‌طور که در جدول مقابل مشاهده می‌کنیم، سه عدد دو رقمی وجود دارد که بر ۵ و ۶ (بر 30) بخش‌پذیر می‌باشند. این اعداد عبارتند از:

$$30 - 60 - 90$$

۳- راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب:



مثال ۸: کوچک‌ترین عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام که بر ۱۵ بخش‌پذیر می‌باشد، چه عددی است؟



مثال ۹: می‌دانیم عددی بر ۱۵ بخش‌پذیر است که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشد. بنابراین تمام حالت‌های ممکن را

می‌نویسیم و با حذف حالت‌های نامطلوب به جواب موردنظر دست می‌یابیم.

حالت اول: بر ۳ بخش‌پذیر است، ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

$$102 \longrightarrow$$

بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیست.

$$103 \longrightarrow$$

بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیست.

$$104 \longrightarrow$$

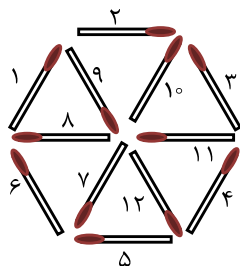
بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر است.

$$105 \longrightarrow$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، با بررسی هریک از حالت‌های نوشته شده و حذف سه حالت نامطلوب، به جواب موردنظر یعنی عدد 105 می‌رسیم که بر ۱۵ بخش‌پذیر است.

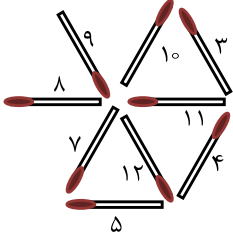


مثال ۹: کدام سه چوب‌کبریت را برداریم تا سه مثلث باقی بماند و چوب‌کبریتی اضافه نماند؟

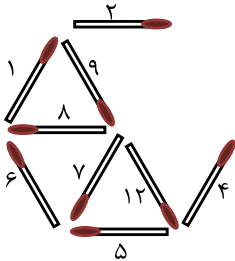




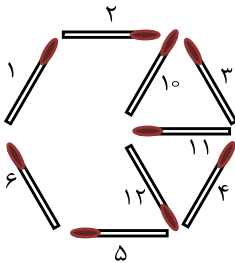
حالت اول: اگر چوب کبریت‌های ۱، ۲ و ۶ را برداریم، چوب کبریت‌های ۸ و ۹ اضافه می‌مانند. در شکل زیر این حالت نشان داده شده است:



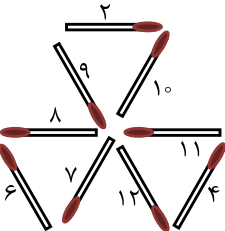
حالت دوم: اگر چوب کبریت‌های ۳، ۱۰ و ۱۱ را برداریم، چوب کبریت‌های ۲ و ۴ اضافه می‌مانند. در شکل زیر این حالت نشان داده شده است:



حالت سوم: اگر چوب کبریت‌های ۷، ۸ و ۹ را برداریم، سه مثلث باقی نمی‌ماند. در شکل زیر این حالت نشان داده شده است:



حالت چهارم: اگر چوب کبریت‌های ۱، ۳ و ۵ را برداریم، سه مثلث باقی می‌ماند و هیچ چوب کبریتی باقی نمی‌ماند. در شکل زیر این حالت نشان داده شده است:



(این حالت جواب مسئله است.)



۱۰: بزرگ‌ترین عدد سه رقمی را بنویسید که بر ۶ بخش پذیر باشد.



همان‌طور که می‌دانیم، عددی بر ۶ بخش پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر باشد. بنابراین داریم:

حالت اول:	بر ۳ بخش پذیر است، ولی بر ۲ بخش پذیر نیست.	→ ۹۹۹
حالت دوم:	بر ۲ بخش پذیر است، ولی بر ۳ بخش پذیر نیست.	→ ۹۹۸
حالت سوم:	بر ۲ و ۳ بخش پذیر نیست.	→ ۹۹۷
حالت چهارم:	بر ۲ و ۳ بخش پذیر است.	→ ۹۹۶

همان طور که مشاهده می‌کنیم، با بررسی هریک از حالت‌های نوشته شده و حذف سه حالت نامطلوب، به جواب موردنظر یعنی عدد ۹۹۶ می‌رسیم که بر ۶ بخش پذیر است.



۱۱: حاصل جمع سه عدد طبیعی یک رقمی ۱۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۷۲ است. آن سه عدد را بیابید.



حالت اول: سه عدد ۲، ۴ و ۸ را انتخاب می‌کنیم.	$2+4+8=14 \Rightarrow 2 \times 4 \times 8=64$	✗
حالت دوم: سه عدد ۱، ۵ و ۸ را انتخاب می‌کنیم.	$5+1+8=14 \Rightarrow 5 \times 1 \times 8=40$	✗
حالت سوم: سه عدد ۳، ۴ و ۷ را انتخاب می‌کنیم.	$3+4+7=14 \Rightarrow 3 \times 4 \times 7=84$	✗
حالت چهارم: سه عدد ۴، ۴ و ۶ را انتخاب می‌کنیم.	$4+4+6=14 \Rightarrow 4 \times 4 \times 6=96$	✗
حالت پنجم: سه عدد ۳، ۳ و ۸ را انتخاب می‌کنیم.	$3+3+8=14 \Rightarrow 3 \times 3 \times 8=72$	✓
حالت ششم: سه عدد ۲، ۶ و ۶ را انتخاب می‌کنیم.	$2+6+6=14 \Rightarrow 2 \times 6 \times 6=72$	✓

همان طور که مشاهده می‌کنیم، این مسئله دو جواب دارد و سه عدد طبیعی موردنظر عددهای (۳ و ۳ و ۸) و (۲ و ۶ و ۶) می‌باشند.

۴- راهبرد الگویابی:



۱۲: با توجه به تساوی‌های زیر، حاصل ضرب آخر را بنویسید.

$$\begin{aligned}
 1^2 &= 1 \times 1 = 1 \\
 11^2 &= 11 \times 11 = 121 \\
 111^2 &= 111 \times 111 = 12321 \\
 1111^2 &= 1111 \times 1111 = 1234321 \\
 11111^2 &= 11111 \times 11111 = 123454321 \\
 111111^2 &= 111111 \times 111111 = \dots
 \end{aligned}$$



همان طور که مشاهده می‌کنیم، تعداد رقم‌های حاصل ضرب، یک واحد از مجموع رقم‌های ضرب شده کم‌تر است
 (۱۲۳۲۱) = (۱۱) × (۱۱) . از طرفی رقم‌های حاصل ضرب نسبت به عدد وسط متقارن هستند و یا به عبارت دیگر، رقم‌های
 حاصل ضرب از دو طرف تکرار شده تا به عدد وسط برسند. بنابراین داریم:

$$۱۱۱۱۱۱^۲ = ۱۱۱۱۱۱ \times ۱۱۱۱۱۱ = ۱۲۳۴۵۶۵۴۳۲۱$$



مثال ۱۳: اگر یک کاغذ مستطیل شکل را ۸ بار تا بزنیم، به چند قسمت مساوی تقسیم می‌شود؟

تعداد قسمت‌های به وجود آمده	تعداد تا زدن
$۲ = ۲$	۱
$۲ \times ۲ = ۴$	۲
$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$	۳
$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۱۶$	۴
	⋮

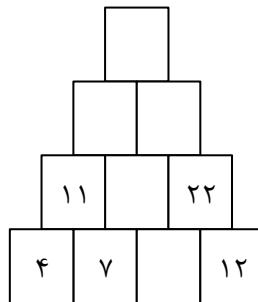


همان طور که در جدول مقابل مشاهده می‌کنیم، اگر عدد ۲ را به تعداد تا زدن در خودش ضرب کنیم، تعداد قسمت‌ها به دست می‌آید. بنابراین اگر ۸ بار تا بزنیم، تعداد قسمت‌ها برابر است با:

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲۵۶$$

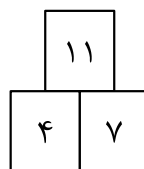


مثال ۱۴: با توجه به عددهای داخل جدول، جاهای خالی را کامل کنید.



اگر به شکل دقت کنیم، در می‌یابیم که حاصل جمع هر دو خانه‌ی متوالی (پشت سرهم) خانه‌ی بالای آن‌ها را

می‌سازد. به عنوان مثال:



$$۴ + ۷ = ۱۱$$

بنابراین کامل شده‌ی جدول به صورت زیر است:

۶۷			
۲۸		۳۹	
۱۱	۱۷	۲۲	
۴	۷	۱۰	۱۲

۱۵: با توجه به تساوی‌های زیر، حاصل تساوی آخر را بنویسید.



$$1 = 1 \times 1$$

$$1 + 3 = 2 \times 2$$

$$1 + 3 + 5 = 3 \times 3$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 205 = \dots$$



با دقت لازم در تساوی‌های نوشته شده درمی‌یابیم که برای به دست آوردن حاصل هر عبارت که مجموع عددهای

فرد است، تعداد عددهای فرد آن عبارت را در خودش ضرب می‌کنیم.

به عنوان مثال:

$$\underbrace{1 + 3 + 5}_{\text{۳ عدد فرد}} = 3 \times 3 = 9$$

۳ عدد فرد

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7}_{\text{۴ عدد فرد}} = 4 \times 4 = 16$$

۴ عدد فرد

اکنون برای به دست آوردن تعداد عددهای فرد ۱ تا ۲۰۵، به این صورت عمل می‌کنیم که یک واحد به عدد فرد آخر (یعنی ۲۰۵) اضافه کرده و حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. به عبارت دیگر:

$$205 + 1 = 206 \rightarrow 206 \div 2 = 103 \quad \text{تعداد عددهای فرد}$$

بنابراین حاصل تساوی آخر برابر است با:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 205 = 103 \times 103 = 10609$$

۵- راهبرد حدس و آزمایش:

۱۶: مجموع دو عدد ۴۳ و اختلاف آن‌ها ۲۵ است. آن دو عدد را بیابید.





نتیجه‌گیری	اختلاف دو عدد	مجموع دو عدد	عدد کوچک‌تر	عدد بزرگ‌تر
باید اختلاف دو عدد بیش‌تر شود. $3 \neq 25 \rightarrow$	۳	۴۳	۲۰	۲۳
باید اختلاف دو عدد بیش‌تر شود. $7 \neq 25 \rightarrow$	۷	۴۳	۱۸	۲۵
باید اختلاف دو عدد بیش‌تر شود. $13 \neq 25 \rightarrow$	۱۳	۴۳	۱۵	۲۸
باید اختلاف دو عدد بیش‌تر شود. $19 \neq 25 \rightarrow$	۱۹	۴۳	۱۲	۳۱
جواب مسئله است. $25 = 25 \rightarrow$	۲۵	۴۳	۹	۳۴

دو عدد موردنظر، عددهای ۹ و ۳۴ می‌باشند.



۱۷: اکنون سن مادر آرش ۱۷ برابر سن اوست. اگر سن مادر آرش شش سال بعد ۵ برابر سن او شود، سن آرش

چقدر است؟



نتیجه‌گیری	سن آن‌ها در شش سال بعد	سن مادر	سن آرش
باید فاصله‌ی بین دو عدد را کم‌تر کنیم. $91 \neq 5 \times 11 \rightarrow$	۹۱ و ۱۱	۸۵	۵
باید فاصله‌ی بین دو عدد را کم‌تر کنیم. $74 \neq 5 \times 10 \rightarrow$	۷۴ و ۱۰	۶۸	۴
باید فاصله‌ی بین دو عدد را کم‌تر کنیم. $57 \neq 5 \times 9 \rightarrow$	۵۷ و ۹	۵۱	۳
جواب مسئله است. $40 = 5 \times 8 \rightarrow$	۴۰ و ۸	۳۴	۲

سن آرش ۲ سال است.



۱۸: خواهر علی از او پرسید: تعداد دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم در مدرسه‌ی شما چقدر است؟ علی پاسخ داد: ما و

ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم. اکنون شما بگویید تعداد دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم مدرسه‌ی علی چقدر است؟



نتیجه‌گیری	۱+ نیمه‌ای از نصف ما + نصف ما + ما + ما	تعداد دانش‌آموزان
باید تعداد دانش‌آموزان را کم کنیم. $116/5 > 100 \rightarrow$	$42+42+21+10/5+1=116/5$	۴۲
باید تعداد دانش‌آموزان را کم کنیم. $111 > 100 \rightarrow$	$40+40+20+10+1=111$	۴۰
باید تعداد دانش‌آموزان را کم کنیم. $105/5 > 100 \rightarrow$	$38+38+19+9/5+1=105/5$	۳۸
جواب مسئله است. $100=100 \rightarrow$	$36+36+18+9+1=100$	۳۶

تعداد دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم مدرسه‌ی علی ۳۶ نفر است.

۶- راهبرد زیرمسئله:



۱۹: فروشنده‌ای ۷ کیلو پیاز، ۱۰ کیلو سیب‌زمینی و ۱۲ کیلو گوجه‌فرنگی فروخته است. اگر پیاز کیلویی ۱۲۰۰ تومان، سیب‌زمینی کیلویی ۱۵۰۰ تومان و گوجه‌فرنگی کیلویی ۲۰۰۰ تومان باشد، او در مجموع چند تومان فروش داشته است؟



ابتدا مسئله را به مسئله‌های ساده‌تر تبدیل کرده، سپس آن‌ها را مرحله به مرحله حل می‌کنیم:

الف) قیمت فروش پیاز چه قدر است؟

$$7 \times 1200 = 8400 \quad \text{تومان}$$

ب) قیمت فروش سیب‌زمینی چه قدر است؟

$$10 \times 1500 = 15000 \quad \text{تومان}$$

ج) قیمت فروش گوجه‌فرنگی، چه قدر است؟

$$12 \times 2000 = 24000 \quad \text{تومان}$$

د) فروشنده در مجموع چه قدر فروش داشته است؟

$$8400 + 15000 + 24000 = 47400 \quad \text{تومان}$$



۲۰: حاصل کسر زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3}{24} - \frac{2}{24} = \frac{1}{24}$$



الف) محاسبه‌ی حاصل صورت کسر:

$$\frac{1 \times 3}{8 \times 3} - \frac{1 \times 2}{12 \times 2} = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}$$

ب) محاسبه‌ی حاصل مخرج کسر:

$$\frac{5 \times 2}{9 \times 2} - \frac{1 \times 3}{6 \times 3} = \frac{10-3}{18} = \frac{7}{18}$$

ج) محاسبه‌ی حاصل کسر اصلی:

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} = \frac{1}{24} \div \frac{7}{18} = \frac{1}{24} \times \frac{18}{7} = \frac{1 \times \cancel{18}^3}{\cancel{24}^4 \times 7} = \frac{3}{28}$$



۲۱: ۸ برابر عبارت $(\frac{38}{40} \div \frac{57}{30})$ چه عددی است؟



با توجه به صورت مسئله داریم:

$$\left(\frac{38}{40} \div \frac{57}{30}\right) \times 8 =$$

الف) حاصل عبارت داخل پرانتز چه قدر است؟

$$\frac{38}{40} \div \frac{57}{30} = \frac{38}{40} \times \frac{30}{57} = \frac{\cancel{38}^2 \times \cancel{30}^2}{\cancel{40}_2 \times \cancel{57}^3} = \frac{1}{2}$$

ب) ۸ برابر حاصل عبارت داخل پرانتز چه قدر است؟

$$\frac{1}{2} \times 8 = \frac{8}{2} = 4$$



مثال ۲۲: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}}$$



از پایین ترین عبارت کسری، شروع به حل می کنیم:

$$3 + \frac{1}{3} = \frac{9+1}{3} = \frac{10}{3}$$

مرحله ی اول:

$$3 + \frac{1}{\frac{10}{3}} = 3 + \frac{3}{10} = \frac{30+3}{10} = \frac{33}{10}$$

مرحله ی دوم:

$$3 + \frac{1}{\frac{33}{10}} = 3 + \frac{10}{33} = \frac{99+10}{33} = \frac{109}{33}$$

مرحله ی سوم:

$$3 + \frac{1}{\frac{109}{33}} = 3 + \frac{33}{109} = \frac{327+33}{109} = \frac{360}{109}$$

مرحله ی چهارم:

۷- راهبرد حل مسئله ی ساده تر:



مثال ۲۳: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{500}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{499}{500}\right) =$$



ابتدا مسئله را ساده تر می کنیم. بدین منظور، مجموع یک کسر از پرانتز اول را با یک کسر از پرانتز دوم به دست

می آوریم که برابر ۱ می شود. به عنوان مثال:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = 1 + 1 = 2$$

اکنون مسئله‌ی اصلی را حل می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{500}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{499}{500}\right) = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{\text{تا } 499} = 499$$

مثال ۲۴: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$6 - 4 + 8 - 6 + 10 - 8 + \dots + 100 - 98 =$$

پیدا مسئله را ساده‌تر می‌کنیم. بدین منظور حاصل هر دو عدد متوالی را به دست می‌آوریم. به عنوان مثال:

$$\underbrace{6-4}_2 + \underbrace{8-6}_2 = 2+2=4$$

اکنون مسئله‌ی اصلی را حل می‌کنیم:

$$6-4+8-6+10-8+\dots+100-98 = \underbrace{2+2+2+\dots+2}_{\text{تا } 48} = 48 \times 2 = 96$$

مثال ۲۵: در یک روستا ۷۸۰ رأس گوسفند وجود دارد. اگر این گوسفندها در هر روز $364/5$ کیلوگرم علف مصرف کنند، سهم هر گوسفند چند کیلوگرم علف خواهد بود؟

پیدا مسئله را ساده‌تر می‌کنیم. (۷۸۰ رأس گوسفند $364/5$ کیلوگرم علف - سهم هر گوسفند چند کیلوگرم؟)

$$\begin{aligned} 364/5 &\approx 400 \\ 780 &\approx 800 \end{aligned} \Rightarrow 800 \div 400 = 2 = \text{کیلوگرم}$$

اکنون مسئله‌ی اصلی را حل می‌کنیم:

$$780 \div 364/5 \approx 2/13 \text{ کیلوگرم}$$

۸- راهبرد روش‌های نمادین:

مثال ۲۶: محدثه برای خرید ۵ خودکار و یک دفتر ۱۲۰۰ تومانی ۴۰۰۰ تومان به فروشنده پرداخت کرد. قیمت هر

خودکار را حساب کنید.

جواب اگر قیمت هر خودکار را برابر \square در نظر بگیریم، داریم:

$$5 \times \square + 1200 = 4000$$

اکنون با روش حدس و آزمایش می‌توانیم جواب مسئله را به دست آوریم.

$$\text{حدس اول: } 5 \times \square + 1200 = 3700 \quad \times$$

$$\text{حدس دوم: } 5 \times \square + 1200 = 3800 \quad \times$$

$$\text{حدس سوم: } 5 \times \square + 1200 = 3900 \quad \times$$

همان طور که مشاهده می‌کنیم، با فرض این که قیمت هر خودکار برابر 56° تومان باشد، تساوی برقرار خواهد بود. $5 \times 56^\circ + 1200 = 4000$ ✓ حدس چهارم

مثال ۲۷: اگر به ۷ برابر عددی، عدد ۴ را اضافه کنیم، حاصل برابر ۹۵ می‌شود. آن عدد چیست؟

جواب اگر عدد موردنظر را \square در نظر بگیریم، داریم:

$$7 \times \square + 4 = 95$$

اکنون با روش حدس و آزمایش می‌توانیم جواب مسئله را به دست آوریم.

حدس اول: $7 \times 10 + 4 = 74$ ✗

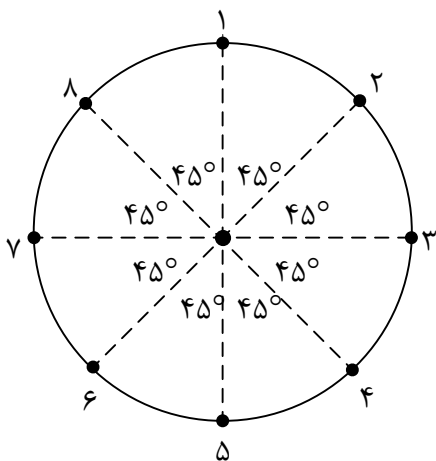
حدس دوم: $7 \times 11 + 4 = 81$ ✗

حدس سوم: $7 \times 12 + 4 = 88$ ✗

حدس چهارم: $7 \times 13 + 4 = 95$ ✓

همان طور که مشاهده می‌کنیم، با فرض این که عدد موردنظر برابر با ۱۳ باشد، تساوی برقرار خواهد بود.

مثال ۲۸: می‌خواهیم دور یک میدان دایره‌ای شکل، ۸ مجسمه قرار دهیم. چگونه می‌توان جای مجسمه‌ها را مشخص کرد؟



جواب همان طور که می‌دانیم هر دایره از دو زاویه‌ی نیم‌صفحه تشکیل شده است. اگر هر نیم‌صفحه را به ۲ قسمت مساوی تقسیم کنیم، دایره به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌شود (۴ زاویه‌ی قائمه تشکیل می‌شود). حال اگر هریک از این ۴ قسمت مساوی را به ۲ قسمت مساوی تقسیم کنیم (نیم‌ساز هریک از زاویه‌های قائمه را رسم کنیم)، دایره به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌شود. بنابراین:

$$360^\circ \div 8 = 45^\circ$$

اکنون به وسیله‌ی نقاله، زاویه‌های 45° با رأس مرکز دایره رسم می‌کنیم. محل برخورد ضلع‌های زاویه‌های رسم شده با محیط دایره، محل قراردادن مجسمه‌ها است.

مثال ۲۹: مجموع سه عدد زوج متوالی ۳۶ است. عدد بزرگ‌تر را بیابید.

جواب اگر عدد زوج اولی را \square در نظر بگیریم، عددهای زوج بعدی عبارتند از: $\square + 2$ و $\square + 4$. اکنون داریم:

$$\square + \square + ۲ + \square + ۴ = ۳۶$$

$$\square + \square + \square + ۶ = ۳۶$$

$$\square + \square + \square = ۳۰$$

اکنون با حدس درمی یابیم که عدد مربوط به \square برابر ۱۰ است. یعنی:

$$\square ۱۰ + \square ۱۰ + \square ۱۰ = ۳۰$$

بنابراین سه عدد زوج موردنظر عبارتند از: ۱۴ ، ۱۲ و ۱۰ که از بین این سه عدد، عدد ۱۴ بزرگتر است.



۱- پارچه‌فروشی ۷۰۰ متر پارچه از قرار متری ۴۰ تومان خرید. ربع آن را متری ۵۰ تومان و $\frac{2}{5}$ بقیه را متری ۵۵ تومان فروخت. بقیه‌ی پارچه را متری چند بفروشد تا در کل ۹۶۰۰ تومان سود ببرد؟ (با استفاده از راهبرد زیرمسئله)

۲- حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش)

$$\frac{(200-1)}{1} \times \frac{(200-2)}{1} \times \frac{(200-3)}{3} \times \dots \times \frac{(200-300)}{300} =$$

۳- شقایق $\frac{3}{5}$ پولش را خرج کرد و $\frac{1}{4}$ آن را به برادرش داد. $\frac{1}{3}$ باقی‌مانده‌ی پولش را نیز دفتر خرید. اگر ۳۵۰ تومان برایش باقی مانده باشد، کل پول شقایق چه قدر بوده است؟ قیمت هر دفتر را حساب کنید. (با استفاده از راهبرد رسم شکل)

۴- با رقم‌های ۴، ۷، ۵ و ۸ چند عدد فرد چهار رقمی می‌توان نوشت؟ (با استفاده از راهبرد الگوسازی)

۵- کوچک‌ترین عدد چهار رقمی را بنویسید که مضرب ۳ باشد. (با استفاده از راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب)



دانش‌آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های پیش‌تر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.