بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه

مـقـدمـاتـی

تألیف: دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان

نظارت عالی: علی خزایی

سرشناسه : خزائی، علی، ۱۳۴۸ -

عنوان و نام پدیدآور : ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه مقدماتی

مشخصات نشر : تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۶.

مشخصات ظاهری : ۲۵۵ ص.؛ ۲۲×۲۹ س‌م.

شابک : 978-600-7903-92-6

وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر

یادداشت : چاپ دوم.

شماره کتابشناسی ملی : ۴۸۳۲۱۷۷

نام کتاب: **ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه مقدماتی**

تألیف: **دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان**

شابک: **۹۷۸ـ۶۰۰ـ۷۹۰۳ـ۹۲ـ۶**

ISBN:978-600-7903-92-6

نوبت چاپ: **چاپ دوم ـ ۱۳۹۷**

تیراژ: **۱۰۰۰ جلد**

تعداد صفحات: ۲۵۵ صفحه

قیمت: ۳۵۰۰۰ تومان

ناشر: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز پخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)

فروشگاه دائمی: تهران - میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی - نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳

پیش‌گفتار

گستردگی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف ازجمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری، افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه‌ی امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به‌عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

۱) **مجموعه کتاب‌های «تابستانه»:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

۲) **مجموعه کتاب‌های «مقدماتی»:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۳) **مجموعه کتاب‌های «پیشرفته»:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

۴) **مجموعه کتاب‌های «جامع»:** این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و سؤالات تشریحی و چهارگزینه‌ای بدون پاسخ در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۵) مجموعه کتاب‌های «تیزهوشان»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول پیشنهاد می‌گردد.

۶) مجموعه کتاب‌های «موضوعی»: این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

۷) مجموعه کتاب‌های «یکی من، یکی تو»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤالات «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یکدیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به‌ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

۸) مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به‌صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته (برای مقاطع ابتدایی و متوسطه اول) و در دو شکل تشریحی و چهارگزینه‌ای (برای مقطع متوسطه دوم) در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمونی از آن فصل به‌عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش فرهنگ ریاضی

مقدمه

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

حضرت محمد (ص):

فقری سخت‌تر از نادانی و ثروتی بالاتر از خردمندی و عبادتی والاتر از تفکر نیست.

خداوند بزرگ را سپاس می‌گوییم که نعمت اندیشیدن را به همگان عطا فرمود تا در پرتو آن، انسان مسیر صحیح زیستن را آموخته و به دیگران نیز بیاموزد.

یکی از راهبردهای مهم یادگیری، آموزش دقیق مفاهیم و انجام تمرین‌های متناسب با اصول یادگیری و تکرار آن است. در این راستا، داشتن منبع مناسب برای یادگیری و درک بیش‌تر و همچنین نمونه سؤالات مناسب و متنوع برای تمرین، می‌تواند یکی از عوامل مهم موفقیت در یادگیری و پیشرفت علمی دانش‌آموزان باشد.

کتابی که در مقابل چشمان جستجوگر شما قرار دارد، بر مبنای نظام آموزشی کانون ریاضیدانان زمان و در جهت تکمیل کتاب‌های زنجیروار آن (تابستانه ← مقدماتی ← پیشرفته) که متناسب با مفاهیم و مطالب کتاب درسی ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه است، همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی به شرح زیر گردآوری شده است:

❋ تدریس در سطح مقدماتی با روشی کلاسیک و دسته‌بندی و تشریح کامل مطالب

❋ ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب

❋ ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با حل تشریحی

❋ تمرین‌های پایان هر فصل

امید است این کتاب، کمک شایانی به موفقیت همه‌ی معلمین گرامی و دانش‌آموزان عزیز بنماید.

دپارتمان متوسطه اول

فهرست مطالب

سیمای فصل اول

- **راهبردهای حل مسئله**
  - راهبرد رسم شکل
  - راهبرد الگوسازی
  - راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب
  - راهبرد الگویابی
  - راهبرد حدس و آزمایش
  - راهبرد زیرمسئله
  - راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر
  - راهبرد روش‌های نمادین
  - حل برخی مسائل مهم راهبردها
  - تمرین‌های فصل اول

راهبردهای حل مسئله:

در این فصل، با انواع راهبردهای حل مسئله آشنا می‌شویم که در این خصوص ۸ راهبرد را بیان می‌کنیم:

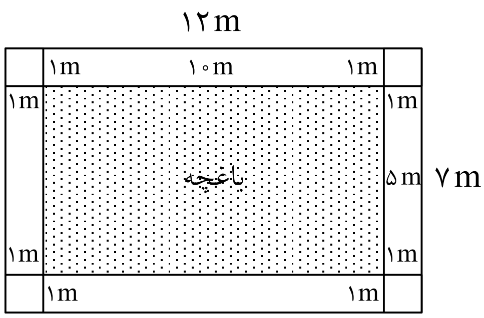
۱ـ راهبرد رسم شکل:

کشیدن و رسم یک شکل مناسب در خصوص یک مسئله می‌تواند به حل آن مسئله کمک کند و یا حتی می‌تواند به‌طور کامل آن را حل کند؛ به‌طوری که نیازی به نوشتن عملیات و محاسبه نباشد. منظور از رسم شکل نقاشی نیست؛ لذا از ترسیم‌های ساده برای درک بهتر و یا حل کردن مسئله می‌توان استفاده کرد.

برای درک بیش‌تر این راهبرد، به حل مثال‌های زیر می‌پردازیم:

مثال ۱: یک باغچه مستطیل شکل به طول ۱۰ متر و عرض ۵ متر است. اگر به فاصله‌ی یک متر از لبه‌ی باغچه دور تا دور آن را نرده بکشیم، چند متر نرده احتیاج داریم؟

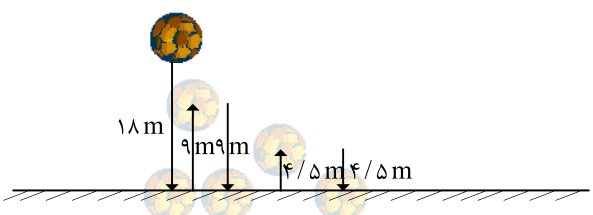
جواب ابتدا یک مستطیل رسم می‌کنیم؛ سپس دور تا دور آن را به فاصله‌ی یک متر از هر ضلع خط می‌کشیم (یعنی ۲ متر به طول و ۲ متر به عرض مستطیل اضافه می‌شود).



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، یک مستطیل جدید به‌وجود می‌آید که طول و عرض آن ۱۲m و ۷m است. بنابراین محیط مستطیل جدید (نرده) برابر است با: $(۱۲+۷)\times ۲=۳۸\text{m}$ =محیط نرده

مثال ۲: توپی از ارتفاع ۱۸ متری سطح زمین رها می‌شود و پس از زمین خوردن، نصف ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. این توپ از لحظه‌ی رها شدن تا سومین مرتبه‌ای که به زمین می‌خورد، چند متر حرکت کرده است؟

جواب



برخورد اول: $۱۸+۹=۲۷$

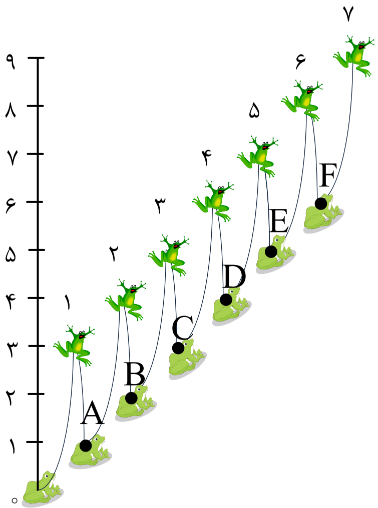
برخورد دوم: $۹+۴/۵=۱۳/۵$

برخورد سوم: $۴/۵$

مجموع برخوردها: $۲۷+۱۳/۵+۴/۵=۴۵$ متر

توپ تا سومین مرتبه‌ای که به زمین می‌خورد، ۴۵ متر طی کرده است.

مثال ۳: قورباغه‌ای می‌خواهد از یک دیوار عمودی بالا برود. او با هر جهش ۳ متر بالا می‌رود و هر بار ۲ متر سُر می‌خورد و پایین می‌آید. اگر ارتفاع دیوار ۹ متر باشد، او با چند جهش به بالای دیوار می‌رسد؟



جواب قورباغه با یک بار جهش، ۳ متر بالا می‌رود و ۲ متر سُر می‌خورد.

پس در ارتفاع ۱ متری سطح زمین قرار می‌گیرد (نقطه‌ی A). در جهش دوم از مکان A، ۳ متر بالا می‌رود و ۲ متر سُر می‌خورد. پس در ارتفاع ۲ متری سطح زمین قرار می‌گیرد (نقطه‌ی B). در جهش سوم از مکان B، ۳ متر بالا می‌رود و ۲ متر سُر می‌خورد. پس در ارتفاع ۳ متری سطح زمین قرار می‌گیرد (نقطه‌ی C). به همین ترتیب که قورباغه به جهش‌های خود همراه با سُر خوردن ادامه می‌دهد، پس از ۷ بار جهش به بالای دیوار می‌رسد. زیرا در آخرین جهش از ارتفاع ۶ متری به ارتفاع ۹ متری می‌رسد و سُر نمی‌خورد.

۲ـ راهبرد الگوسازی:

در بعضی مسئله‌ها لازم است همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسیم. برای این‌که حالتی از قلم نیافتد، لازم است آن‌ها را با نظم، الگو و ترتیبی مشخص بنویسیم. الگوسازی کمک می‌کند که مطمئن شویم همه‌ی حالت‌ها را نوشته‌ایم. بنابراین در مسئله‌هایی که لازم است همه‌ی پاسخ‌های ممکن را بنویسیم، می‌توانیم از این راهبرد استفاده کنیم.

برای درک بیش‌تر این راهبرد، به حل مثال‌های زیر می‌پردازیم:

مثال ۴: دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ و حاصل جمع آن‌ها کم‌ترین مقدار ممکن باشد. جدول را با یک نظم و ترتیب کامل بکشید. کوچک‌ترین عدد طبیعی چیست؟ حاصل ضرب آن در چه عددی ۲۴ می‌شود؟ اکنون عدد طبیعی بعدی را درنظر بگیرید و به همین ترتیب عددها را پیدا کنید.

جواب ابتدا کل حالت‌های ممکن را پیدا کرده و در جدول قرار می‌دهیم.

حاصل‌جمع	دومین عدد	اولین عدد
۲۵	۲۴	۱
۱۴	۱۲	۲
۱۱	۸	۳
۱۰	۶	۴

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، کوچک‌ترین عدد طبیعی عدد ۱ است که حاصل ضرب آن در عدد ۲۴ برابر با ۲۴ می‌شود. حاصل جمع دو عدد پیدا شده (۲۴ و ۱) برابر ۲۵ است.

اکنون عدد طبیعی بعدی یعنی عدد ۲ را درنظر می‌گیریم که حاصل ضرب آن در عدد ۱۲ برابر با ۲۴ می‌شود. حاصل جمع دو عدد پیدا شده (۱۲ و ۲) برابر ۱۴ است. عددهای دیگر به‌دست آمده، (۸ و ۳) و (۶ و ۴) می‌باشند.
در بین عددهای به‌دست آمده، دو عدد (۶ و ۴) کم‌ترین حاصل‌جمع را دارند که جواب مسئله می‌باشند.

نکته ۱: در حل مسئله‌هایی مانند مسئله‌ی بالا، جواب‌های موردنظر دو عددی می‌باشند که کم‌ترین اختلاف را داشته باشند.

مثال ۵: با انگشتان یک دست به ۵ صورت می‌توان عدد ۱ را نشان داد. به چند صورت می‌توان عدد ۲ را نشان داد؟

جواب برای انگشت اول، ۴ حالت وجود دارد. یعنی انگشت اول را با ۴ انگشت دیگر می‌توان برای عدد ۲ نشان داد. برای انگشت دوم، ۳ حالت، برای انگشت سوم، ۲ حالت و برای انگشت چهارم ۱ حالت وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$۴+۳+۲+۱=۱۰$$

انگشت اول	انگشت دوم	انگشت سوم	انگشت چهارم	انگشت پنجم
✓	✓			
✓		✓		
✓			✓	
✓				✓
	✓	✓		
	✓		✓	
	✓			✓
		✓	✓	
		✓		✓
			✓	✓

حالت‌های مختلف نشان دادن عدد ۲ را در جدول بالا مشاهده می‌کنیم.

مثال ۶: با سه رقم ۳، ۵ و ۸ تمام عددهای سه رقمی غیرتکراری را بنویسید.

جواب همان‌طور که در جدول مقابل مشاهده می‌کنیم، عددهای سه رقمی موردنظر عبارتند از:

۳۵۸ – ۳۸۵ – ۵۳۸ – ۵۸۳ – ۸۳۵ – ۸۵۳

یکان	دهگان	صدگان
۸	۵	۳
۵	۸	۳
۸	۳	۵
۳	۸	۵
۵	۳	۸
۳	۵	۸

مثال ۷: با سکه‌های ۵۰ و ۱۰۰ تومانی به چند حالت می‌توان ۵۰۰ تومان درست کرد؟

جواب

طریقه‌ی ساختن ۵۰۰ تومان	تعداد سکه‌های ۱۰۰ تومانی	تعداد سکه‌های ۵۰ تومانی
$(۰ \times ۵۰) + (۵ \times ۱۰۰) = ۵۰۰$	۵	۰
$(۲ \times ۵۰) + (۴ \times ۱۰۰) = ۵۰۰$	۴	۲
$(۴ \times ۵۰) + (۳ \times ۱۰۰) = ۵۰۰$	۳	۴
$(۶ \times ۵۰) + (۲ \times ۱۰۰) = ۵۰۰$	۲	۶
$(۸ \times ۵۰) + (۱ \times ۱۰۰) = ۵۰۰$	۱	۸
$(۱۰ \times ۵۰) + (۰ \times ۱۰۰) = ۵۰۰$	۰	۱۰

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، تعداد کل حالت‌ها برابر با ۶ است.

مثال ۸: طول و عرض مستطیلی را بیابید که محیط آن ۴۸ سانتی‌متر باشد و مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن باشد.

جواب

مجموع طول و عرض $۴۸ \div ۲ = ۲۴$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، در بین حالت‌های نوشته شده، بیش‌ترین مساحت عدد ۱۴۴ است که مربوط به مستطیلی است که طول و عرض آن ۱۲ و ۱۲ می‌باشد (یعنی مربع است). بنابراین مستطیل موردنظر، مستطیلی است که طول و عرض آن ۱۲ و ۱۲ می‌باشد. همچنین با توجه به نکته ۱ نیز می‌توانیم به جواب موردنظر دست یابیم.

مساحت	عرض	طول
۲۳	۱	۲۳
۴۴	۲	۲۲
۶۳	۳	۲۱
۸۰	۴	۲۰
۹۵	۵	۱۹
۱۰۸	۶	۱۸
۱۱۹	۷	۱۷
۱۲۸	۸	۱۶
۱۳۵	۹	۱۵
۱۴۰	۱۰	۱۴
۱۴۳	۱۱	۱۳
۱۴۴	۱۲	۱۲

مثال ۹: با عددهای ۲، ۹، ۶ و ۳ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

جواب هریک از عددهای چهار رقمی را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

ی	د	ص	ی هـ

برای خانه‌ی مربوط به (ی هـ) چهار حالت وجود دارد؛ یعنی هریک از چهار رقم می‌توانند در این خانه قرار بگیرند. برای خانه‌ی مربوط به (ص) سه حالت وجود دارد. زیرا تکرار ارقام مجاز نمی‌باشد و یکی از ارقام در خانه (ی هـ) مورد استفاده قرار گرفته است. به همین ترتیب برای خانه‌ی (د) دو حالت و برای خانه‌ی (ی) یک حالت وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

ی	د	ص	ی هـ
۱	۲	۳	۴

$\rightarrow$ ۴×۳×۲×۱=۲۴

مثال ۱۰: علی ۴ کت و ۳ شلوار دارد. او چند دست کت و شلوار می‌تواند بپوشد؟

جواب هریک از کت‌ها و شلوارها را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

کت‌ها: a, b, c, d

شلوارها: x, y, z

برای هریک از کت‌ها (مثلاً a) ۳ شلوار وجود دارد (شلوارهای z, y, x)؛ یعنی ۳ دست کت و شلوار سِت می‌شود. برای کت‌های b، c و d نیز ۳ شلوار وجود دارد. بنابراین تعداد کل دست‌های کت و شلوار برابر است با: $۴ \times ۳ = ۱۲$

۳ـ راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب:

با توجه به شرایط و اطلاعات مسئله می‌توانیم حالت‌های نامطلوب و نادرست را کنار بگذاریم تا با حذف آن‌ها پاسخ مسئله و یا همان حالت‌های مطلوب به‌دست آیند. برای پیدا کردن تمام حالت‌های ممکن می‌توانیم از راهبرد الگوسازی استفاده کنیم. بدین صورت که ابتدا فهرستی از تمام حالت‌های نامطلوب را به‌دست می‌آوریم، سپس با توجه به شرایط بیان شده در مسئله، حالت‌های نامطلوب را حذف می‌کنیم.

برای درک بیش‌تر این راهبرد، به حل مثال‌های زیر می‌پردازیم:

مثال ۱۱: مجموع سن سه نفر ۱۴ سال و حاصل ضرب سن آن‌ها ۷۰ سال است. سن بزرگ‌ترین نفر چه‌قدر است؟
ابتدا با راهبردهای الگوسازی همه‌ی حالت‌هایی را که ضرب سه عدد طبیعی برابر ۷۰ می‌شود، بنویسید. به این جدول چه ستونی باید اضافه کنید تا حالت‌های نامطلوب حذف و فقط حالت مطلوب باقی بماند؟

سن نفر سوم	سن نفر دوم	سن نفر اول

جواب به این جدول باید ستون «حاصل‌جمع سن‌ها» اضافه شود. بنابراین داریم:

حاصل جمع سن‌ها	سن نفر سوم	سن نفر دوم	سن نفر اول	
۷۲	۷۰	۱	۱	حالت اول
۳۸	۳۵	۲	۱	حالت دوم
۲۰	۱۴	۵	۱	حالت سوم
۱۸	۱۰	۷	۱	حالت چهارم
۱۴	۷	۵	۲	حالت پنجم

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، ۵ حالت وجود دارد که حاصل ضرب سه عدد برابر ۷۰ می‌شود. از بین این حالت‌ها، حالت‌های اول تا چهارم، حالت‌های نامطلوب هستند که حذف می‌شوند. زیرا حاصل جمع آن‌ها برابر ۱۴ نیست و تنها حالت مطلوب و جواب مسئله حالت پنجم است که حاصل ضرب سه عدد ۲، ۵ و ۷ برابر ۷۰ و حاصل جمع آن‌ها برابر ۱۴ است.

مثال ۱۲: دوست شما یک عدد حسابی کوچک‌تر از ۱۰۰ را درنظر گرفت. شما باید با طرح چند سؤال، عدد موردنظر را پیدا کنید. او فقط می‌تواند به سؤال‌های شما بله و خیر بگوید. چگونه می‌توان عدد موردنظر را پیدا کرد. در واقع از ۰ تا ۹۹، ۱۰۰ عدد وجود دارد که فقط یکی مطلوب و موردنظر است و باقی‌مانده نامطلوب‌اند. با این توضیح کدام‌یک از سؤال‌های زیر مناسب‌تر است؟ چرا؟

(۱) آیا عدد موردنظر شما ۲۷ است؟　　(۲) آیا عدد موردنظر شما زوج است؟

(۳) آیا عدد موردنظر شما یک رقمی است؟　　(۴) آیا عدد موردنظر شما از ۵۰ بزرگ‌تر است؟

با توجه به پاسخی که به سؤال‌های بالا دادید، یک روش طرح سؤال همراه با نظم و ترتیب بیان کنید که بتوان با پرسیدن آن‌ها به عدد موردنظر رسید.

جواب سؤال‌های شماره‌ی (۲) ، (۳) و (۴) مناسب هستند. یکی از راه‌حل‌ها این است که هر بار تعداد عددها را نصف کنیم و به این ترتیب با حذف عددهای نادرست به عدد درست نزدیک شویم. به‌عنوان مثال:

آیا عدد از ۵۰ بزرگ‌تر است؟
- (بله) آیا عدد از ۷۵ بزرگ‌تر است؟
  - (بله) ...
  - (خیر) ...
- (خیر) آیا عدد از ۲۵ بزرگ‌تر است؟
  - (بله) ...
  - (خیر) ... آیا عدد از ۱۲ بزرگ‌تر است؟
    - (بله) ...
    - (خیر) ...

۴ـ راهبرد الگویابی:

در حل برخی مسئله‌ها ممکن است از الگو یا رابطه‌ی خاصی بین اعداد یا شکل‌ها استفاده کنیم. در این حالت ممکن است با دو نوع الگوی عددی یا هندسی مواجه شویم. کشف الگو، رابطه و نظم موجود در بین الگوهای عددی و هندسی کمک می‌کند تا بتوانیم خواسته‌ی مسئله را پاسخ دهیم.

برای درک بیش‌تر این راهبرد، به حل مثال‌های زیر می‌پردازیم:

مثال ۱۳: سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید. رابطه‌ی بین عددها را توضیح دهید.

الف) ۱,۴,۷,۱۰,۱۳,　,　,

جواب همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، فاصله‌ی هر دو عدد متوالی برابر ۳ است و اعداد در حال افزایش هستند. بنابراین داریم:
۱,۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹,۲۲

ب) ۱,۴,۹,۱۶,　,　,

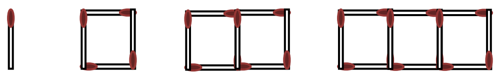
جواب همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، هریک از عددهای داده شده، از ضرب عددهای ...,۱,۲,۳,۴ در خودشان به‌دست آمده‌اند. بنابراین داریم:
۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶,۴۹

ج) ۶۴,۳۲,۱۶,۸,　,　,

جواب همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، هریک از عددهای داده شده، از تقسیم عدد قبلی بر عدد ۲ به‌دست آمده‌اند.

بنابراین داریم: ۶۴,۳۲,۱۶,۸,۴,۲

مثال ۱۴: شکل دهم با چند چوب‌کبریت ساخته می‌شود؟ چرا؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

جواب تعداد چوب‌کبریت‌ها در هریک از شکل‌ها به‌صورت زیر است:

۱,۴,۷,۱۰

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم تعداد چوب‌کبریت‌ها در هر مرحله، به اندازه‌ی ۳ واحد در حال افزایش است. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل دهم برابر ۲۸ خواهد بود. یعنی:

۱,۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹,۲۲,۲۵,۲۸

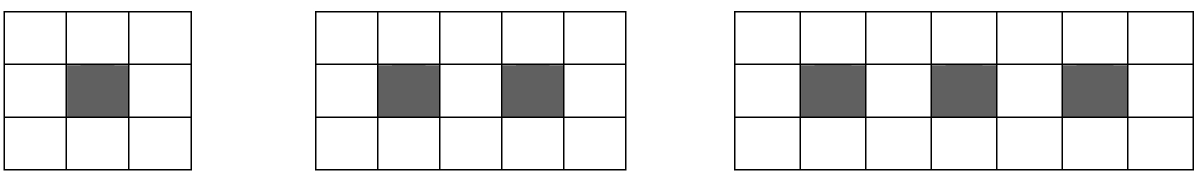
همچنین می‌توانیم به این صورت بیان کنیم که تعداد چوب کبریت‌ها از مضرب‌های طبیعی عدد ۳، دو واحد کم‌تر است.

شکل (۴)	شکل (۳)	شکل (۲)	شکل (۱)	
$۳ \times ۴ - ۲$	$۳ \times ۳ - ۲$	$۳ \times ۲ - ۲$	$۳ \times ۱ - ۲$	...

بنابراین تعداد چوب‌کبریت‌های شکل دهم برابر است با:

$۳ \times ۱۰ - ۲ = ۲۸$

مثال ۱۵: اگر شکل‌ها به همین ترتیب ادامه پیدا کند، چه کسری از شکل شماره‌ی (۶) رنگی است؟



(۱) (۲) (۳)

جواب کسر مربوط به هریک از شکل‌ها به‌صورت زیر است:

$\frac{۱}{۹}, \frac{۲}{۱۵}, \frac{۳}{۲۱}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، صورت کسرها به اندازه‌ی یک واحد و مخرج آن‌ها به اندازه‌ی ۶ واحد در حال افزایش است. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، کسر مربوط به شکل شماره‌ی (۶) برابر $\frac{۶}{۳۹}$ خواهد بود. یعنی:

$\frac{۱}{۹}, \frac{۲}{۱۵}, \frac{۳}{۲۱}, \frac{۴}{۲۷}, \frac{۵}{۳۳}, \frac{۶}{۳۹}$

۵ـ راهبرد حدس و آزمایش:

در برخی مواقع برای حل یک مسئله ممکن است روش و راه‌حل مستقیمی وجود نداشته باشد و یا رسیدن به جواب طولانی و دشوار باشد. در این صورت می‌توانیم با یک روش مناسب، منطقی و منظم، پاسخ احتمالی مسئله را حدس بزنیم، سپس با توجه به شرایط بیان شده در مسئله، حدس خود را بررسی کنیم و با توجه به نتیجه‌ی به‌دست آمده، حدس بعدی را بزنیم تا کم‌کم به پاسخ مسئله نزدیک شویم. برای نشان دادن حدس‌ها و آزمایش‌های خود، باید راه‌حل مناسبی پیدا کنیم.

برای درک بیش‌تر این راهبرد، به حل مثال‌های زیر می‌پردازیم:

مثال ۱۶: ۲۰ دستگاه دوچرخه و سه‌چرخه در یک پارکینگ وجود دارد. اگر تعداد کل چرخ‌های آن‌ها ۴۵ عدد باشد، چند دوچرخه و چند سه‌چرخه در پارکینگ وجود دارد؟

تعداد دوچرخه	تعداد سه‌چرخه	بررسی آزمایش

در حدس اول تعداد دوچرخه‌ها را ۱۰ و تعداد سه‌چرخه‌ها را هم ۱۰ درنظر بگیرید. با کامل کردن ردیف اول جدول، حدس خود را بررسی و آزمایش کنید. با توجه به نتیجه‌ی بررسی، باید تعداد سه‌چرخه‌ها را بیش‌تر کرد یا دوچرخه‌ها را؟

جواب بررسی آزمایش را براساس تعداد کل چرخ‌ها درنظر می‌گیریم. در ردیف اول اگر تعداد دوچرخه‌ها و تعداد سه‌چرخه‌ها را برابر ۱۰ درنظر بگیریم، تعداد کل چرخ‌ها برابر ۵۰ خواهد بود که قابل قبول نمی‌باشد. باتوجه به این نتیجه، تعداد دوچرخه‌ها را باید بیش‌تر کنیم. انتخاب و حدس صحیح این است که تعداد دوچرخه‌ها را ۱۵ و تعداد سه‌چرخه‌ها را ۵ درنظر بگیریم.

تعداد دوچرخه‌ها	تعداد سه‌چرخه‌ها	مجموع چرخ‌ها	بررسی آزمایش
۱۰	۱۰	۵۰	باید از سه‌چرخه‌ها کم کنیم. $۵۰ > ۴۵ \rightarrow$
۱۲	۸	۴۸	باید از سه‌چرخه‌ها کم کنیم. $۴۸ > ۴۵ \rightarrow$
۱۳	۷	۴۷	باید از سه‌چرخه‌ها کم کنیم. $۴۷ > ۴۵ \rightarrow$
۱۴	۶	۴۶	باید از سه‌چرخه‌ها کم کنیم. $۴۶ > ۴۵ \rightarrow$
۱۵	۵	۴۵	جواب مسئله است. $۴۵ = ۴۵ \rightarrow$

مثال ۱۷: دو زاویه متمم یکدیگراند. یکی از این دو زاویه از سه برابر دیگری ۱۰ درجه بیش‌تر است. اندازه‌ی هر دو زاویه را پیدا کنید.

جواب همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، در ردیف آخر، دو زاویه‌ی ۲۰° و ۷۰° مکمل یکدیگراند و زاویه‌ی ۷۰° از سه برابر زاویه‌ی ۲۰°، ۱۰ درجه بیش‌تر است.

بررسی آزمایش	مجموع دو زاویه	زاویه‌ی دوم	زاویه‌ی اول
باید زاویه را بزرگ‌تر کنیم. $۵۰ < ۹۰ \rightarrow$	۵۰	۴۰	۱۰
باید زاویه را بزرگ‌تر کنیم. $۵۸ < ۹۰ \rightarrow$	۵۸	۴۶	۱۲
باید زاویه را بزرگ‌تر کنیم. $۷۰ < ۹۰ \rightarrow$	۷۰	۵۵	۱۵
باید زاویه را بزرگ‌تر کنیم. $۸۲ < ۹۰ \rightarrow$	۸۲	۶۴	۱۸
جواب مسئله است. $۹۰ = ۹۰ \rightarrow$	۹۰	۷۰	۲۰

مثال ۱۸: به‌جای $\boxed{}$ چه عددی می‌توان قرار داد؟ $۳ \times \boxed{} + ۱۰ = ۳۱$

به‌جای $\boxed{}$ عددهای مختلفی را حدس بزنید، از عدد ۱۰ شروع کنید.

جواب

بررسی آزمایش	$۳ \times \boxed{} + ۱۰$	$۳ \times \boxed{}$	$\boxed{}$
باید عدد را کوچک‌تر کنیم. $۴۰ > ۳۱ \rightarrow$	۴۰	۳۰	۱۰
باید عدد را کوچک‌تر کنیم. $۳۷ > ۳۱ \rightarrow$	۳۷	۲۷	۹
باید عدد را کوچک‌تر کنیم. $۳۴ > ۳۱ \rightarrow$	۳۴	۲۴	۸
جواب مسئله است. $۳۱ = ۳۱ \rightarrow$	۳۱	۲۱	۷

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، عدد موردنظر برابر ۷ است.

۶ـ راهبرد زیرمسئله:

در برخی مواقع، ممکن است با مسئله‌ی پیچیده‌ای مواجه شویم. در این حالت می‌توان مسئله‌ی پیچیده و چند مرحله‌ای را به مسئله‌ی ساده‌تر و مرحله به مرحله تبدیل کنیم.

برای حل، فهرستی از این زیرمسئله‌ها را می‌نویسیم، سپس به‌ترتیب به آن‌ها پاسخ می‌دهیم. اگر ترتیب زیرمسئله‌ها را درست تشخیص داده باشیم، حل هر زیرمسئله به حل مسئله‌ی بعدی کمک می‌کند تا در نهایت به خواسته‌ی اصلی مسئله برسیم.

برای درک بیش‌تر این راهبرد، به حل مثال‌های زیر می‌پردازیم:

مثال ۱۹: پس‌انداز هفتگی محمد ۳۰۰۰ تومان است. او حساب کرد ۵ هفته پس‌انداز او، نصف قیمت کیفی است که دوست دارد بخرد. قیمت کیف چه‌قدر است؟

جواب برای حل، زیرمسئله‌های این مسئله را بیان کرده و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم:

الف) پس‌انداز ۵ هفته چه‌قدر می‌شود؟

پس‌انداز ۵ هفته (تومان) $۵ \times ۳۰۰۰ = ۱۵۰۰۰$

ب) اگر این عدد نصف قیمت کیف باشد، قیمت کیف چه‌قدر است؟

قیمت کیف (تومان) $۱۵۰۰۰ \times ۲ = ۳۰۰۰۰$

مثال ۲۰: طول، عرض و عمق یک استخر به‌ترتیب ۱۲، ۶ و ۳ متر است. می‌خواهند کف و دیوارهای این استخر را رنگ کنند. اگر برای هر مترمربع ۰/۳ کیلوگرم رنگ لازم باشد، برای رنگ کردن استخر چند کیلوگرم رنگ لازم است؟

جواب برای حل، زیرمسئله‌های این مسئله را بیان کرده و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم.

الف) مساحت دیوارهای استخر چه‌قدر است؟

مساحت دیوارها = محیط قاعده × ارتفاع $= \left[\left(۱۲+۶\right)\times ۲\right]\times ۳ = ۱۰۸$ مترمربع

ب) مساحت کف استخر چه‌قدر است؟

مساحت کف = طول × عرض $= ۱۲ \times ۶ = ۷۲$ مترمربع

ج) کل مساحتی که باید رنگ شود، چه‌قدر است؟

$۱۰۸ + ۷۲ = ۱۸۰$ مترمربع

د) اگر برای هر مترمربع ۰/۳ کیلوگرم رنگ لازم باشد، برای رنگ کردن استخر چند کیلوگرم رنگ لازم است؟

$۱۸۰ \times ۰/۳ = ۵۴$ کیلوگرم

مثال ۲۱: میوه‌فروشی، امروز ۴۰ کیلوگرم سیب به قیمت هر کیلوگرم ۲۵۰۰ تومان و ۸۰ کیلوگرم پرتقال به قیمت هر کیلوگرم ۱۵۰۰ تومان خرید. او هر کیلوگرم سیب را ۳۰۰۰ تومان و هر کیلوگرم پرتقال را ۲۰۰۰ تومان فروخت. این میوه‌فروش از این کار خود چه‌قدر سود برده است؟

جواب برای حل، زیرمسئله‌های زیر را بیان کرده و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم.

الف) قیمت خرید سیب چه‌قدر است؟

قیمت خرید سیب (تومان) $۴۰ \times ۲۵۰۰ = ۱۰۰۰۰۰$

ب) قیمت خرید پرتقال چه‌قدر است؟

قیمت خرید پرتقال (تومان) $۸۰ \times ۱۵۰۰ = ۱۲۰۰۰۰$

ج) قیمت کل خرید میوه‌فروش را حساب کنید.

قیمت خرید کل (تومان) $۱۰۰۰۰۰ + ۱۲۰۰۰۰ = ۲۲۰۰۰۰$

د) قیمت فروش سیب چه‌قدر است؟

قیمت فروش سیب (تومان) $۴۰ \times ۳۰۰۰ = ۱۲۰۰۰۰$

ه) قیمت فروش پرتقال چه‌قدر است؟

قیمت فروش پرتقال (تومان) $۸۰ \times ۲۰۰۰ = ۱۶۰۰۰۰$

و) قیمت کل فروش میوه‌فروش را حساب کنید.

قیمت فروش کل (تومان) $۱۲۰۰۰۰ + ۱۶۰۰۰۰ = ۲۸۰۰۰۰$

ز) مقدار سود این میوه‌فروش را به‌دست آورید.

مقدار سود (تومان) $۲۸۰۰۰۰ - ۲۲۰۰۰۰ = ۶۰۰۰۰$ = قیمت خرید ـ قیمت فروش = مقدار سود

۷ـ راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر:

برای حل برخی از مسئله‌ها، ابتدا مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط با آن را حل می‌کنیم، سپس با استفاده از نتیجه و پاسخ مسئله‌ی ساده شده، جواب مسئله‌ی اصلی را به‌دست می‌آوریم. برای ساده کردن مسئله می‌توان از عددهای تقریبی یا عددهای کوچک‌تر استفاده کرد. برای نتیجه‌گیری و پیدا کردن پاسخ مسئله‌ی اصلی از راهبرد الگویابی استفاده می‌کنیم و الگوی کشف شده در مسئله‌ی ساده را به مسئله‌ی اصلی مرتبط می‌کنیم.

برای درک بیش‌تر این راهبرد، به حل مثال‌های زیر می‌پردازیم:

مثال ۲۲: قطر خورشید ۱۳۹۲۵۳۰ کیلومتر و قطر کره‌ی زمین ۱۲۷۵۶/۶ کیلومتر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر کره‌ی زمین است؟

برای ساده‌تر شدن مسئله بهتر است از عددهای تقریبی استفاده کنید.

$۱۳۹۲۵۳۰ \simeq ۱۰۰۰۰۰۰$

خلاصه‌ی مسئله‌ی ساده شده را بنویسید و پاسخ دهید.

$۱۲۷۵۶/۶ \simeq$

جواب برای حل این مسئله، ابتدا هریک از عددهای مربوط به قطر خورشید و قطر کره‌ی زمین را تقریب می‌زنیم، سپس قطر خورشید را بر قطر کره‌ی زمین تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} ۱۳۹۲۵۳۰ \simeq ۱۰۰۰۰۰۰ \\ ۱۲۷۵۶/۶ \simeq ۱۰۰۰۰ \end{array} \Rightarrow ۱۰۰۰۰۰۰ \div ۱۰۰۰۰ = ۱۰۰$$ برابر

اکنون با این روش می‌توانیم جواب دقیق‌تر را به‌دست آوریم:

$۱۳۹۲۵۳۰ \div ۱۲۷۵۶/۶ \simeq ۱۰۹$ برابر

مثال ۲۳: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+...+\frac{۱}{۱۰۲۴}$$

به‌جای حل کردن عبارت بالا ابتدا ساده شده‌ی این مسئله را پاسخ دهید.

در پاسخ چه الگو و رابطه‌ای تشخیص می‌دهید که به کمک آن بتوانید پاسخ مسئله‌ی اصلی را بدون محاسبه بنویسید.

جواب ابتدا مسئله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}=\frac{۴+۲+۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۸+۴+۲+۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

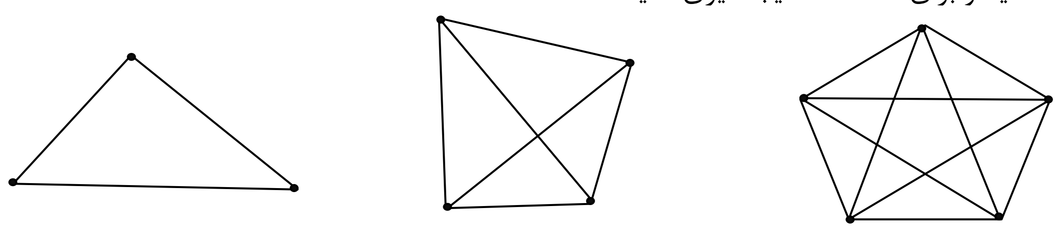
با مقایسه‌ی این دو حاصل‌جمع درمی‌یابیم که حاصل عبارت داده شده، همواره کسری است که مخرج آن مساوی مخرج کسر آخر و صورت آن یک واحد کم‌تر از مخرج آن است. بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+...+\frac{۱}{۱۰۲۴}=\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$$

مثال ۲۴: اگر ۱۰ نقطه که روی یک خط نیستند را دوبه‌دو به هم وصل کنیم، چند پاره‌خط به‌وجود می‌آید؟

تعداد پاره‌خط‌ها در واقع مجموع تعداد ضلع‌ها و تعداد قطرهاست.

یک الگو پیدا کنید و برای ۱۰ نقطه نتیجه‌گیری کنید.



جواب

روش اول: اگر با ۳ نقطه شروع کنیم تا به ۱۰ نقطه برسیم، تعداد پاره‌خط‌ها به‌صورت زیر خواهد بود:

$$۳\underbrace{\ ,\ }_{+۳}۶\underbrace{\ ,\ }_{+۴}۱۰\underbrace{\ ,\ }_{+۵}۱۵\underbrace{\ ,\ }_{+۶}۲۱\underbrace{\ ,\ }_{+۷}...$$

در این الگوی عددی، رابطه‌ی دقیقی وجود دارد که فاصله‌ی هر دو عدد متوالی، یک واحد یک واحد زیاد می‌شود. الگوی بالا را براساس حاصل جمع تعداد ضلع‌ها و تعداد قطرها می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$۳+۰\ ,\quad ۴+۲\ ,\quad ۵+۵\ ,\quad ۶+۹\ ,\quad ۷+۱۴\ ,....$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، تعداد پاره‌خط‌ها با ۱۰ نقطه برابر است با:

تعداد ضلع‌ها + تعداد قطرها $= ۱۰ + ۳۵ = ۴۵$

روش دوم: با کمی دقت به تعداد پاره‌خط‌ها درمی‌یابیم که اگر تعداد نقطه‌ها را در یکی کم‌تر از آن ضرب کرده و سپس حاصل را نصف کنیم، تعداد پاره‌خط‌ها به‌دست می‌آید:

به‌عنوان مثال: $\frac{۳\times ۲}{۲}=۳$, $\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$, $\frac{۵\times ۴}{۲}=۱۰$, ...

بنابراین با داشتن ۱۰ نقطه، تعداد پاره‌خط‌ها برابر است با:

$$\frac{۱۰\times ۹}{۲}=۴۵$$

۸ـ راهبرد روش‌های نمادین:

بسیاری از مسئله‌ها را می‌توان به کمک نمادهای جبری به یک معادله تبدیل کرد. از فصل سوم به بعد از این راهبرد برای حل برخی مسائل می‌توانیم استفاده کنیم. در برخی از مسئله‌ها نیز ممکن است از مدل‌سازی هندسی استفاده کنیم. تبدیل مسئله به یک شکل هندسی و حل هندسی آن نیز نوعی روش نمادین یا مدل‌سازی به‌شمار می‌رود.

برای درک بیش‌تر این راهبرد به حل مثال‌های زیر می‌پردازیم:

مثال ۲۵: احمد ۳۰۰۰۰ تومان پول داشت. او ۴ دفتر خرید و ۲۰۰۰ تومان برایش باقی ماند. قیمت هر دفتر چه‌قدر است؟

متن این مسئله را می‌توانید با تساوی مقابل نشان دهید.

$$۴\times \boxed{} + ۲۰۰۰ = ۳۰۰۰۰$$

مربع نشان‌دهنده‌ی چه چیزی است؟

اکنون می‌توانید عددی را که باید در مربع قرار گیرد، حدس بزنید و آزمایش کنید.

جواب مربع نشان‌دهنده‌ی قیمت هر دفتر است. حدس‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

$$۴\times \boxed{۵۰۰۰} + ۲۰۰۰ = ۲۲۰۰۰$$

$$۴\times \boxed{۶۰۰۰} + ۲۰۰۰ = ۲۶۰۰۰$$

$$۴\times \boxed{۷۰۰۰} + ۲۰۰۰ = ۳۰۰۰۰$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، با فرض این‌که قیمت هر دفتر برابر ۷۰۰۰ تومان باشد، تساوی برقرار خواهد بود.

مثال ۲۶: فاطمه کتاب داستانی را در ۶ ساعت مطالعه کرد و ۱۰ صفحه از آن باقی ماند. اگر این کتاب ۱۰۰ صفحه داشته باشد، فاطمه به‌طور متوسط در هر ساعت چند صفحه از آن را مطالعه کرده است؟

جواب در تساوی زیر، مربع را تعداد صفحات مطالعه شده در هر ساعت درنظر می‌گیریم: یعنی:

$۶\times\boxed{}+۱۰=۱۰۰$

حدس‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

$۶\times\boxed{۱۰}+۱۰=۷۰$

$۶\times\boxed{۱۲}+۱۰=۸۲$

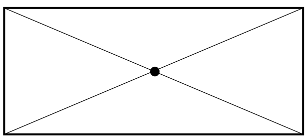
$۶\times\boxed{۱۴}+۱۰=۹۴$

$۶\times\boxed{۱۵}+۱۰=۱۰۰$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، با فرض این‌که فاطمه به‌طور متوسط در هر ساعت ۱۵ صفحه مطالعه کرده است، تساوی برقرار خواهد بود.

مثال ۲۷: یک سالن مستطیل شکل است. می‌خواهند در مکانی از سقف این سالن دریچه‌ی کولر قرار دهند به‌طوری که از ۴ گوشه‌ی آن به یک اندازه باشد. محل دریچه را تعیین کنید.

جواب اگر محل دریچه را محل تقاطع قطرهای مستطیل درنظر بگیریم، از ۴ گوشه به یک اندازه خواهد بود.



حل برخی مسائل مهم راهبردها:

مثال ۲۸: $\frac{۱}{۳}$ دانش‌آموزان کلاسی بسکتبال و $\frac{۱}{۵}$ دانش‌آموزان آن کلاس، فوتبال بازی می‌کنند. سایر دانش‌آموزان که تعدادشان ۱۴ نفر است، بازی آن‌ها را تماشا می‌کنند. این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

جواب با استفاده از راهبرد زیرمسئله، این مثال را حل می‌کنیم:

الف) چه کسری از دانش‌آموزان این کلاس، بسکتبال و فوتبال بازی می‌کنند؟

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}=\frac{۵}{۱۵}+\frac{۳}{۱۵}=\frac{۸}{۱۵}$$

ب) چه کسری از دانش‌آموزان، بازی‌ها را تماشا می‌کنند؟

$$\frac{۱۵}{۱۵}-\frac{۸}{۱۵}=\frac{۷}{۱۵}$$

ج) تعداد دانش‌آموزان این کلاس چند نفر است؟

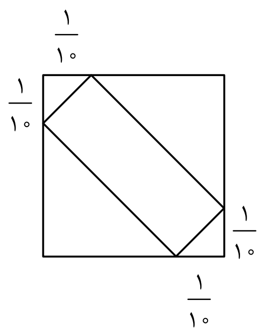
با حدس درمی‌یابیم که عدد داخل مربع که تعداد دانش‌آموزان کلاس را نشان می‌دهد، برابر ۳۰ است.

$$\text{تماشاچی} \quad \frac{7}{15}\overset{\times 2}{=}\frac{14}{\boxed{30}} \quad \text{کل}$$

مثال ۲۹: مساحت مربعی به ضلع ۱۰۰ سانتی‌متر، ۱ مترمربع است. اگر از ضلع مربع ۱۰ درصد کم کنیم، مساحت مربع چند درصد کم می‌شود؟

جواب با استفاده از راهبرد رسم شکل، این مثال را حل می‌کنیم:

مربعی به ضلع ۱ متر رسم کرده و هر ضلع آن را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. هر قسمت $\frac{1}{10}$ ضلع مربع اصلی است. قسمت باقی‌مانده از هر ضلع $\frac{9}{10}$ ضلع مربع اصلی است. بنابراین مساحت جدید برابر است با:



$$\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{81}{100}=81\%$$
$$100\%-81\%=19\%$$

مساحت مربع ٪۱۹ کم می‌شود.

مثال ۳۰: کشاورزی زمین خود را به نسبت‌های زیر بذرپاشی کرده است:

گندم: ٪۴۵   جو: ٪۳۷/۵   ذرت: ٪۱۷/۵

اگر مساحت زمین او ۱۵ هکتار باشد، مساحت زیر کشت هر بذر را حساب کنید.

جواب با استفاده از راهبرد زیرمسئله، این مثال را حل می‌کنیم:

الف) مساحت زمین برحسب مترمربع چه‌قدر است؟ $15\times 10000=150000$ مترمربع

ب) مساحت زیر کشت گندم چند مترمربع است؟

$$\frac{45}{100} \overset{\times 15000}{=} \frac{\boxed{67500}}{1500000}$$

ج) مساحت زیر کشت جو چند مترمربع است؟

$$\frac{37/5}{100} \overset{\times 15000}{=} \frac{\boxed{562500}}{1500000}$$

د) مساحت زیر کشت ذرت چند مترمربع است؟

$$\frac{17/5}{100} \overset{\times 15000}{=} \frac{\boxed{262500}}{1500000}$$

مثال ۳۱: حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

$$1\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{3}\times 1\frac{1}{4}\times\ldots\times 1\frac{1}{100}$$

جواب با استفاده از راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر، این مثال را حل می‌کنیم:

ابتدا مسئله را ساده‌تر می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} 1\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ 1\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \\ 1\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{2}\times\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\times\frac{5}{\underset{1}{\cancel{4}}}=\frac{5}{2}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مخرج کسر اول و صورت کسر آخر باقی می‌ماند.

اکنون مسئله‌ی اصلی را حل می‌کنیم:

$$1\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{3}\times 1\frac{1}{4}\times\ldots\times 1\frac{1}{100}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{2}\times\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\times\frac{5}{\underset{1}{\cancel{4}}}\times\ldots\times\frac{101}{\underset{1}{\cancel{100}}}=\frac{101}{2}$$

مثال ۳۲: در یک کارگاه تولید کفش ۴۹۶۰ جفت کفش تولید شده است. $\frac{۳}{۸}$ آن‌ها پسرانه و بقیه دخترانه است. اگر قیمت هر جفت کفش پسرانه ۲۷۰۰۰ تومان و قیمت هر جفت کفش دخترانه ۳۴۰۰۰ تومان باشد، درآمد این کارگاه چه‌قدر است؟

جواب: با استفاده از راهبرد زیرمسئله، این مثال را حل می‌کنیم:

الف) درآمد کفش‌های پسرانه این کارگاه چه‌قدر است؟

تعداد جفت کفش‌های پسرانه $\frac{۳}{۸} \times ۴۹۶۰ = ۱۸۶۰$

قیمت کل کفش‌های پسرانه (تومان) $۱۸۶۰ \times ۲۷۰۰۰ = ۵۰۲۲۰۰۰۰$

ب) درآمد کفش‌های دخترانه این کارگاه چه‌قدر است؟

تعداد جفت کفش‌های دخترانه $۴۹۶۰ - ۱۸۶۰ = ۳۱۰۰$

قیمت کل کفش‌های دخترانه (تومان) $۳۱۰۰ \times ۳۴۰۰۰ = ۱۰۵۴۰۰۰۰۰$

ج) درآمد کل این کارگاه را حساب کنید.

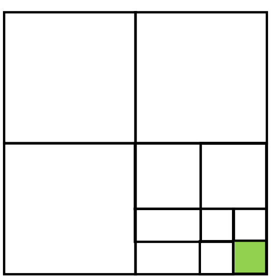
درآمد کل کارگاه (تومان) $۵۲۲۰۰۰۰ + ۱۰۵۴۰۰۰۰۰ = ۱۵۵۶۲۰۰۰۰$

مثال ۳۳: سارا یک بازی روی صفحه‌ی شطرنجی انجام می‌دهد. مهره‌ی او روی نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ است. او ابتدا مهره‌اش را ۳ خانه به سمت راست، سپس ۴ خانه به سمت بالا و در انتها ۲ خانه به سمت چپ آورد. در حال حاضر مهره‌ی سارا روی کدام نقطه قرار دارد؟

جواب: با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش، این مثال را حل می‌کنیم:

با حدس درمی‌یابیم که اگر از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$، ۳ خانه به سمت راست و ۴ خانه به سمت بالا حرکت کنیم، به نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \end{bmatrix}$ می‌رسیم و اگر از این نقطه ۲ خانه به سمت چپ حرکت کنیم، به نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}$ می‌رسیم.

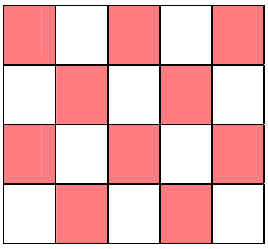
مثال ۳۴: چه کسری از شکل مقابل رنگی است؟ توضیح دهید.



جواب با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش، این مثال را حل می‌کنیم:

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، مربع اصلی به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. پس هریک از قسمت‌ها $\frac{۱}{۴}$ مربع اصلی است. یکی از این قسمت‌ها که به شکل مربع می‌باشد، به ۴ قسمت تقسیم شده است. پس هریک از این قسمت‌ها $\frac{۱}{۴}$ از $\frac{۱}{۴}$ مربع اصلی (یعنی $\frac{۱}{۱۶}$) است. یکی از این قسمت‌ها $\frac{۱}{۴}$ از $\frac{۱}{۱۶}$ مربع اصلی (یعنی $\frac{۱}{۶۴}$) است.

مثال ۳۵: اگر دیوارهای یک استخر با طرح زیر کاشی‌کاری شده باشد، چه کسری از دیوار کاشی‌کاری شده است؟



جواب با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش، این مثال را حل می‌کنیم:

با دقت در شکل و حدس درمی‌یابیم که نصف شکل، کاشی‌کاری شده است. بنابراین کسر مربوط به قسمت کاشی‌کاری شده $\frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۳۶: به چند حالت حاصل ضرب دو عدد طبیعی ۳۶ می‌شود؟ در کدام حالت، حاصل جمع کم‌ترین مقدار است؟

جواب با استفاده از راهبرد الگوسازی، این مثال را حل می‌کنیم:

در جدول زیر، تمام حالت‌های ممکن را نوشته و پاسخ مسئله را پیدا می‌کنیم:

عدد اول	عدد دوم	حاصل جمع
۱	۳۶	۳۷
۲	۱۸	۲۰
۳	۱۲	۱۵
۴	۹	۱۳
۶	۶	۱۲

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، ۵ حالت وجود دارد و در حالتی که هر دو عدد برابر ۶ است، کم‌ترین حاصل‌جمع را دارند.

مثال ۳۷: عددی را ۵ برابر کرده و ۳ واحد از آن کم کردیم، حاصل ۳۲ شد. عدد موردنظر چیست؟

جواب با استفاده از راهبرد روش‌های نمادین، این مثال را حل می‌کنیم:

این مثال را به‌صورت تساوی مقابل می‌نویسیم:

$$۵ \times \boxed{} - ۳ = ۳۲$$

اکنون با حدس، عدد موردنظر را پیدا می‌کنیم:

$$۵ \times \boxed{۶} - ۳ = ۲۷$$

$$۵ \times \boxed{۷} - ۳ = ۳۲$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، اگر عدد موردنظر را برابر ۷ درنظر بگیریم، تساوی برقرار خواهد شد.

تمرین

۱- زهرا $\frac{۱}{۳}$ پولش را مداد و $\frac{۱}{۴}$ باقی‌مانده را دفتر خرید و ۲۴۰۰ تومان برایش باقی ماند. زهرا چه‌قدر پول داشته است؟ (به کمک راهبرد رسم شکل)

۲- از سه برابر عددی ۴ واحد کم کردیم؛ حاصل برابر ۱۱ شد. آن عدد چیست؟ (به کمک راهبرد روش‌های نمادین)

۳- حاصل جمع سه عدد طبیعی ۲۲ و حاصل ضرب آن‌ها ۸۰ می‌باشد. آن سه عدد را بیابید. (به کمک راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب)

۴- تعداد قطرهای یک هفت‌ضلعی را به‌دست آورید. (به کمک راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر)

۵- حاصل عبارت زیر را بیابید. (به کمک راهبرد زیرمسئله)

$$\left(۷+۴\times۳\div۲\right)-\left(۲۴\div۶\times۵-۱۶\right)=$$

توجه **دانش‌آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های بیش‌تر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.**