

# ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه پیشرفته

تألیف: دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان

نظارت عالی: علی خزایی

عنوان و نام پدیدآور : ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه پیشرفته  
 وضعیت ویراست : [ویراست ۲].  
 مشخصات نشر : تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۶.  
 مشخصات ظاهری : ۱۸۱ ص جدول، نمودار؛ ۲۲×۲۹ س.م.  
 شابک : 978-600-7903-96-4  
 وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر  
 یادداشت : چاپ دوم.  
 شناسه افزوده : خزائی، علی، ۱۳۴۸ - ، ناظر  
 شناسه افزوده : کانون ریاضیدانان زمان  
 شماره کتابشناسی ملی : ۴۸۳۹۸۰۸

نام کتاب:	ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه پیشرفته
تألیف:	دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان
شابک:	۹۷۸-۶۰۰-۷۹۰۳-۹۶-۴
	<b>ISBN:978-600-7903-96-4</b>
نوبت چاپ:	چاپ دوم - ۱۳۹۷
تیراژ:	۱۰۰۰ جلد

تعداد صفحات: ۱۸۱ صفحه

قیمت: ۳۰۰۰۰ تومان



ناشر: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز پخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)

فروشگاه دائمی: تهران - میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی - نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳

حق چاپ برای کانون ریاضیدانان زمان محفوظ است.

کپی برداری و تکثیر هر قسمت از کتاب بدون اجازه کتبی از کانون ریاضیدانان زمان پیگرد قانونی دارد.

## پیش‌گفتار

گسترده‌گی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف از جمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری، افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه‌ی امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به‌عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

۱) **مجموعه کتاب‌های «تابستانه»:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

۲) **مجموعه کتاب‌های «مقدماتی»:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۳) **مجموعه کتاب‌های «پیشرفته»:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

۴) **مجموعه کتاب‌های «جامع»:** این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و سؤالات تشریحی و چهارگزینه‌ای بدون پاسخ در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۵) مجموعه کتاب‌های «تیزهوشان»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول پیشنهاد می‌گردد.

۶) مجموعه کتاب‌های «موضوعی»: این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

۷) مجموعه کتاب‌های «یکی من، یکی تو»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤالات «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یکدیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به‌ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

۸) مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به‌صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته (برای مقاطع ابتدایی و متوسطه اول) و در دو شکل تشریحی و چهارگزینه‌ای (برای مقطع متوسطه دوم) در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمونی از آن فصل به‌عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش فرهنگ ریاضی

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

حضرت علی (ع):

دانشی که قرین فهم نباشد، نفعی ندارد. خواندنی که توأم با تامل نباشد، سودمند نیست. عبادتی که بی تفکر باشد، خیری ندارد.

خداوند بزرگ را سپاس می‌گوییم که نعمت اندیشیدن را به همگان عطا فرمود تا در پرتو آن، انسان مسیر صحیح زیستن را آموخته و به دیگران نیز بیاموزد.

یکی از راهبردهای مهم یادگیری، آموزش دقیق مفاهیم و انجام تمرین‌های متناسب با اصول یادگیری و تکرار آن است. در این راستا، داشتن منبع مناسب برای یادگیری و درک بیشتر و همچنین نمونه سؤالات مناسب و متنوع برای تمرین، می‌تواند یکی از عوامل مهم موفقیت در یادگیری و پیشرفت علمی دانش‌آموزان باشد.

کتابی که در مقابل چشمان جستجوگر شما قرار دارد، بر مبنای نظام آموزشی کانون ریاضیدانان زمان و در جهت تکمیل کتاب‌های زنجیروار آن (تابستانه ← مقدماتی ← پیشرفته) که متناسب با مفاهیم و مطالب کتاب درسی ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه است، همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی به شرح زیر گردآوری شده است:

\* تدریس در سطح پیشرفته با روشی کلاسیک و دسته‌بندی و تشریح کامل مطالب

\* ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب

\* ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی

\* تمرین‌های پایان هر فصل

امید است این کتاب، کمک شایانی به موفقیت همه‌ی معلمین گرامی و دانش‌آموزان عزیز بنماید.

دپارتمان متوسطه اول

## فهرست مطالب

صفحه

عنوان

۱	فصل اول: «عددهای صحیح و گویا»
۲	حل مسائل مهم عددهای صحیح
۳	مجموع دنباله‌ی عددهای صحیح با فاصله‌های مساوی
۶	عمل دوتایی در عددهای صحیح
۶	حل برخی مسائل مهم عددهای گویا
۱۰	روش‌های یافتن چند عدد گویا بین دو عدد گویا
۱۱	کسرهای تلسکوپی
۱۲	کسرهای مسلسل
۱۳	کسرهای تحویل‌ناپذیر
۱۳	انواع کسرهای تحویل‌ناپذیر و تبدیل آن‌ها به عدد اعشاری
۱۳	نماد اعشاری تحقیقی مختوم
۱۴	نماد اعشاری متناوب ساده
۱۵	نماد اعشاری متناوب مرکب
۱۷	نمایش کسری عددهای اعشاری
۱۷	تبدیل عدد اعشاری تحقیقی مختوم به عدد گویا
۱۷	تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به عدد گویا
۱۷	تبدیل عدد اعشاری متناوب مرکب به عدد گویا
۲۳	تمرین‌های فصل اول
۲۵	فصل دوم: «عددهای اول»
۲۶	حل مسائل مهم عددهای اول و مرکب
۲۸	بخش‌پذیری بر اعداد و با استفاده از روش تجزیه
۲۹	کاربردهای روش تجزیه‌ی یک عدد به شمارنده‌های اول
۲۹	محاسبه‌ی تعداد شمارنده‌های اول یک عدد
۲۹	محاسبه‌ی تعداد کل شمارنده‌های یک عدد
۳۱	محاسبه‌ی مجموع شمارنده‌های یک عدد
۳۱	محاسبه‌ی حاصل ضرب شمارنده‌های یک عدد
۳۲	محاسبه‌ی تعداد صفرهای سمت راست یک عدد

۳۳	محاسبه‌ی ب.م.م و ک.م.م دو یا چند عدد
۳۳	دو عدد نسبت به هم اول (دو عدد متباین)
۳۴	روش به‌دست آوردن تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر از $n$ که نسبت به $n$ اول‌اند
۳۵	بسط اعداد
۳۵	فاکتوریل و کاربردهای آن
۳۶	روش به‌دست آوردن تعداد عامل‌های یک عدد اول در $n!$ (قضیه‌ی چیشف)
۳۷	روش به‌دست آوردن تعداد صفرهای سمت راست عدد $n!$
۳۹	قواعد بخش‌پذیری
۴۷	تمرین‌های فصل دوم

### فصل سوم: «چندضلعی‌ها»

۴۹	حل مسائل مهم چندضلعی‌ها
۵۰	حل برخی اثبات‌های مهم چهارضلعی‌ها
۵۳	دو زاویه‌ی مجاور
۵۹	دو زاویه‌ی مجانب
۶۰	تمرین‌های فصل سوم
۶۳	

### فصل چهارم: «جبر و معادله»

۶۵	حل مسائل مهم جبر
۶۶	درجه‌ی یک جمله‌ای
۶۷	درجه‌ی چندجمله‌ای
۶۷	تقسیم چندجمله‌ای‌ها
۶۸	اتحاد
۷۰	تعریف اتحاد
۷۰	اتحادهای مهم جبری
۷۲	پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت جبری به‌ازای مقدارهای داده شده
۷۳	تجزیه‌ی عبارت‌های جبری
۷۶	حل مسائل مهم معادله
۷۸	معادله‌های توانی
۷۸	تعریف معادله‌ی توانی
۷۸	روش حل معادله‌های توانی
۷۹	معادله‌های رادیکالی

۷۹	تعریف معادله‌ی رادیکالی
۷۹	روش حل معادله‌های رادیکالی
۸۰	تعداد جواب‌های یک معادله
۸۰	حل مسائل به کمک معادله
۸۲	تمرین‌های فصل چهارم
<b>۸۳</b>	<b>فصل پنجم: «بردار و مختصات»</b>
۸۴	تقسیم‌بندی دستگاه مختصات
۸۵	قرینه‌ی یک نقطه نسبت به محورها و مبدأ مختصات و نیم‌سازها
۸۷	فاصله‌ی دو نقطه در دستگاه مختصات (طول یک پاره‌خط)
۸۸	مختصات وسط یک پاره‌خط
۸۹	مختصات مرکز ثقل مثلث
۸۹	شرط تشکیل متوازی‌الاضلاع با داشتن مختصات چهار رأس
۹۰	بردارهای هم‌جهت
۹۰	بردارهای قرینه
۹۱	قرینه‌ی یک بردار
۹۱	تفریق متناظر با یک بردار
۹۲	بردار مکان یک نقطه
۹۳	شرط موازی بودن و عمود بودن دو بردار
۹۳	قرینه‌ی یک بردار نسبت به محورها و مبدأ مختصات و نیم‌سازها
۹۵	تفریق دو بردار به روش هندسی
۹۸	تمرین‌های فصل پنجم
<b>۹۹</b>	<b>فصل ششم: «مثلث»</b>
۱۰۰	قضیه‌ی فیثاغورس و اثبات آن
۱۰۰	عکس قضیه‌ی فیثاغورس و اثبات آن
۱۱۳	حل مسائل مهم هم‌نهشتی دو مثلث
۱۱۷	حل مسائل مهم هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه
۱۲۰	تمرین‌های فصل ششم
<b>۱۲۱</b>	<b>فصل هفتم: «توان و جذر»</b>
۱۲۲	محاسبه‌ی مقدار عددی عبارت‌های توان‌دار
۱۲۲	ضرب و تقسیم عددهای توان‌دار با پایه‌ها و توان‌های نامساوی



۱۲۸	..... جمع و تفریق عددهای توان‌دار
۱۲۹	..... مقایسه‌ی عددهای توان‌دار
۱۳۱	..... روش به‌دست آوردن رقم یکان یک عدد توان‌دار
۱۳۵	..... جذر عددهای توان‌دار
۱۳۶	..... روش به‌دست آوردن جذر یک عدد از طریق تجزیه
۱۳۸	..... روش دیگر جذر تقریبی
۱۳۹	..... رادیکال‌ها
۱۳۹	..... ریشه‌ی $n$ ام یک عدد
۱۴۱	..... قوانین ریشه‌گیری
۱۴۱	..... اعمال مربوط به رادیکال‌ها
۱۴۱	..... ساده کردن رادیکال‌ها
۱۴۲	..... جمع و تفریق رادیکال‌ها
۱۴۴	..... ضرب عدد در رادیکال
۱۴۵	..... تمرین‌های فصل هفتم

#### فصل هشتم: «آمار و احتمال» ..... ۱۴۷

۱۴۸	..... حل مسائل مهم آمار
۱۴۹	..... نکات مهم آمار و میانگین
۱۵۳	..... نکات مهم احتمال
۱۵۷	..... اصل ضرب
۱۵۸	..... اصل جمع
۱۵۹	..... تمرین‌های فصل هشتم

#### فصل نهم: «دایره» ..... ۱۶۱

۱۶۲	..... اوضاع نسبی دو دایره
۱۶۳	..... نکات مهم دایره
۱۶۶	..... زاویه‌ی ظلی
۱۶۸	..... طریقه‌ی رسم خط مماس بر دایره
۱۷۰	..... مماس مشترک دو دایره
۱۷۴	..... چندضلعی محاطی
۱۷۴	..... چندضلعی محیطی
۱۷۶	..... دایره‌ی محیطی مثلث

۱۷۶	..... دایره‌ی محاطی مثلث
۱۷۹	..... مرکز چندضلعی منتظم
۱۸۰	..... سهم چندضلعی منتظم
۱۸۰	..... مساحت چندضلعی منتظم
۱۸۱	..... تمرین‌های فصل نهم

# سیمای فصل اول



در کتاب مقدماتی، با مطالب مربوط به این فصل آشنا شدیم. اکنون در ادامه‌ی آن مطالب و در سطح پیشرفته‌تر، به حل مثال‌های مهم و بیان مفاهیم جدیدی می‌پردازیم:

حل مسائل مهم عددهای صحیح:



۱: روی محور عددهای صحیح، قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی B، نقطه‌ی  $2B - A$  است.



۱: قرینه‌ی نقطه‌ی  $30$  - نسبت به نقطه‌ی  $-4$ ، چه نقطه‌ای است؟



با توجه به نکته ۱ داریم:

$$2 \times (-4) - (-30) = -8 + 30 = 22$$



۲: اگر مجموع و اختلاف دو عدد را داشته باشیم و بخواهیم هریک از دو عدد را به دست آوریم، می‌توانیم از رابطه‌های زیر استفاده کنیم:

$$\text{عدد بزرگتر} = \frac{\text{اختلاف} + \text{مجموع}}{2}$$

$$\text{عدد کوچکتر} = \frac{\text{اختلاف} - \text{مجموع}}{2}$$



۲: مجموع دو عدد برابر  $12$  - و اختلاف آن‌ها برابر  $36$  است. آن دو عدد را بیابید.



$$\text{عدد بزرگتر} = \frac{-12 + 36}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$\text{عدد کوچکتر} = \frac{-12 - 36}{2} = \frac{-48}{2} = -24$$



۳: میانگین چهار عدد صحیح برابر  $12$  - است. چه عددی به آن‌ها اضافه کنیم تا میانگین عددهای حاصل برابر

$10$  شود؟



$$\text{تعداد} \times \text{میانگین} = \text{مجموع} \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$$

بنابراین داریم:  $(-12) \times 4 = -48$  = مجموع چهار عدد

$$10 \times 5 = 50 = \text{مجموع پنج عدد}$$

$$50 - (-48) = 50 + 48 = 98 = \text{عدد پنجم}$$



۴: مجموع دو عدد A و B برابر  $-10$ ، مجموع دو عدد B و C برابر  $-12$  و مجموع دو عدد A و C برابر  $-8$  است. میانگین این سه عدد را حساب کنید.



$$\begin{cases} A + B = -10 \\ B + C = -12 \\ A + C = -8 \end{cases}$$

$$2A + 2B + 2C = -30 \Rightarrow A + B + C = (-30) \div 2 = -15 \quad \text{مجموع سه عدد}$$

$$\Rightarrow (-15) \div 3 = -5 \quad \text{میانگین سه عدد}$$

۵: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.



$$21 - 24 + 25 - 28 + 29 - 32 + \dots + 101 - 104 =$$



$$\underbrace{(21 - 24)}_{-3} + \underbrace{(25 - 28)}_{-3} + \underbrace{(29 - 32)}_{-3} + \dots + \underbrace{(101 - 104)}_{-3} = \underbrace{(-3) + (-3) + (-3) + \dots + (-3)}_{21 \text{ تا}} =$$

$$21 \times (-3) = -63$$

مجموع دنباله‌ی عددهای صحیح با فاصله‌های مساوی:

دنباله‌ی عددهای صحیح با فاصله‌های مساوی، دنباله‌ای از اعداد هستند که بین هر دو عدد متوالی، فاصله‌ی ثابتی وجود دارد (تفاضل هر عدد از عدد قبلی، مقدار ثابتی است) و با نظم مشخصی، دنباله‌ی اعداد بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر می‌شوند. به‌عنوان مثال، در دنباله‌ی زیر، عددها در حال بزرگ شدن هستند و فاصله‌ی بین هر دو عدد متوالی، برابر ۴ است:

$$10, 14, 18, 22, \dots$$

برای به دست آوردن مجموع این گونه از دنباله‌های اعداد، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{مجموع دنباله‌ی اعداد} = \frac{(\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}) \times \text{تعداد اعداد}}{۲}$$

در این رابطه، تعداد اعداد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله‌ی بین دو عدد متوالی}} + ۱$$

۶: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.



$$k = ۱۲ + ۱۵ + ۱۸ + \dots + ۶۲۴$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{۶۲۴ - ۱۲}{۳} + ۱ = \frac{۶۱۲}{۳} + ۱ = ۲۰۴ + ۱ = ۲۰۵$$



$$k = \frac{۲۰۵ \times (۱۲ + ۶۲۴)}{۲} = \frac{۲۰۵ \times \cancel{۶۳۶}^{۳۱۸}}{۲} = ۶۵۱۹۰$$

۷: مجموع مضرب‌های عدد ۷ کم‌تر از ۵۰۰ را حساب کنید.



$$۷ + ۱۴ + ۲۱ + \dots + ۴۹۷ =$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{۴۹۷ - ۷}{۷} + ۱ = \frac{۴۹۰}{۷} + ۱ = ۷۰ + ۱ = ۷۱$$

باید حاصل عبارت مقابل را به دست آوریم:



$$\text{مجموع دنباله‌ی اعداد} = \frac{۷۱ \times (۷ + ۴۹۷)}{۲} = \frac{۷ \times \cancel{۵۰۴}^{۲۵۲}}{۲} = ۱۷۸۹۲$$

بدین منظور داریم:

۸: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.



$$A = -۶ - ۱۲ - ۱۸ - \dots - ۷۵۶$$

عبارت A را با استفاده از تبدیل تفریق به جمع، به صورت زیر می‌نویسیم:



$$A = (-۶) + (-۱۲) + (-۱۸) + \dots + (-۷۵۶)$$

در عبارت A، عددها در حال کوچک شدن هستند و فاصله‌ی هر دو عدد متوالی برابر ۶- است. از آنجاکه تعداد اعداد همواره عددی مثبت است، لذا برای به دست آوردن تعداد اعداد در عبارت A، بدون در نظر گرفتن علامت‌ها عمل می‌کنیم. یعنی:

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{۷۵۶ - ۶}{۶} + ۱ = \frac{۷۵۰}{۶} + ۱ = ۱۲۵ + ۱ = ۱۲۶$$

$$A = -\frac{۱۲۶ \times (۶ + ۷۵۶)}{۲} = -\frac{\overset{۶۳}{\cancel{۱۲۶}} \times ۷۶۲}{\underset{۱}{\cancel{۲}}} = -۴۸۰۰۶$$

اکنون داریم:

۳: برای به دست آوردن مجموع عددهای طبیعی از ۱ تا هر عدد دلخواه مانند  $n$ ، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲}$$



نکته

۹: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰۰ =$$

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰۰ = \frac{۱۰۰۰ \times (۱۰۰۰ + ۱)}{۲} = \frac{\overset{۵۰۰}{\cancel{۱۰۰۰}} \times ۱۰۰۱}{\underset{۱}{\cancel{۲}}} = ۵۰۰۵۰۰$$



مثال



جواب

۴: برای به دست آوردن مجموع عددهای طبیعی زوج از ۲ تا هر عدد دلخواه زوج مانند  $2n$ ، از رابطه‌ی زیر

$$۲ + ۴ + ۶ + \dots + 2n = n(n+1)$$

استفاده می‌کنیم:



نکته

۱۰: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۸۵۲ =$$

$$2n = ۸۵۲ \Rightarrow n = \frac{۸۵۲}{۲} = ۴۲۶$$

$$۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۸۵۲ = ۴۲۶(۴۲۶ + ۱) = ۴۲۶ \times ۴۲۷ = ۱۸۱۹۰۲$$



مثال



جواب

۵: برای به دست آوردن مجموع عددهای طبیعی فرد از ۱ تا هر عدد دلخواه فرد مانند  $2n-1$ ، از رابطه‌ی زیر

$$۱ + ۳ + ۵ + \dots + 2n - 1 = n^2$$

استفاده می‌کنیم:



نکته

مثال ۱۱: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 279 =$$

$$2n - 1 = 279 \Rightarrow 2n = 279 + 1 \Rightarrow 2n = 280 \Rightarrow n = \frac{280}{2} = 140$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 279 = 140^2 = 19600$$

عمل دوتایی در عددهای صحیح:

در برخی موارد، بین دو عدد عملی وجود دارد که هیچ یک از چهار عمل اصلی نمی باشد. بلکه ممکن است با یک علامت یا یک نماد به صورت  $\square, \Delta, *$  تعریف شود. این نوع عمل ها را عمل دوتایی می گویند. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند، عمل  $*$  را بین این دو عدد به صورت  $a * b$  می نویسیم.

مثال ۱۲: اگر داشته باشیم  $a * b = 2ab - 3b + 4$ ، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) 
$$\frac{(-5) * (-4)}{3 * (-6)}$$

$$(-5) * (-4) = 2 \times (-5) \times (-4) - 3 \times (-4) + 4 = 40 + 12 + 4 = 56 \quad (1)$$

$$3 * (-6) = 2 \times 3 \times (-6) - 3 \times (-6) + 4 = -36 + 18 + 4 = -14 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{(-5) * (-4)}{3 * (-6)} = \frac{56}{-14} = -4$$

ب)  $(10 * (-7)) * ((-8) * (-2))$

$$10 * (-7) = 2 \times 10 \times (-7) - 3 \times (-7) + 4 = -140 + 21 + 4 = -115 \quad (1)$$

$$(-8) * (-2) = 2 \times (-8) \times (-2) - 3 \times (-2) + 4 = 32 + 6 + 4 = 42 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (10 * (-7)) * ((-8) * (-2)) = (-115) * 42 = 2 \times (-115) \times 42 - 3 \times 42 + 4 = -9660 - 126 + 4 = -9782$$

حل برخی مسائل مهم عددهای گویا:

مثال ۱۳: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 \frac{1}{15} + 2 \frac{2}{15} + 3 \frac{3}{15} + \dots + 65 \frac{65}{15} =$$

$$1 \frac{1}{15} + 2 \frac{2}{15} + 3 \frac{3}{15} + \dots + 65 \frac{65}{15} = (1 + 2 + 3 + \dots + 65) + \left( \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \dots + \frac{65}{15} \right) =$$



$$\frac{65 \times 66}{2} + \frac{1+2+3+\dots+65}{15} = 2145 + \frac{2145}{15} = 2145 + 143 = 2288$$

۱۴: حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین روش حساب کنید.

مثال

$$\frac{-5396}{1478} \times \frac{-5395}{1478} \times \frac{-5394}{1478} \times \dots \times \frac{5396}{1478} =$$

در ضرب داده شده، عدد گویای  $\frac{0}{1478}$  که برابر صفر است، وجود دارد. لذا حاصل ضرب عدد صفر در هر تعداد

جواب

عدد گویا برابر صفر است.

۱۵: اگر  $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{999}{1000}$  و  $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{1000}{1001}$  حاصل  $2002A \times B$  را به دست

مثال

آورید.

$$2002A \times B = 2002 \times (A \times B) =$$

$$2002 \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{999}{1000} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{1000}{1001} \right) = \frac{2002}{1} \times \frac{1}{1001} = 2$$

جواب

۱۶: حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

مثال

$$\begin{aligned} & \left( \frac{5}{24} - \frac{1}{18} + \frac{7}{30} \right) \times \frac{18}{139} = \\ & \left( \frac{11}{15} + \frac{7}{25} - \frac{1}{5} + \frac{7}{10} \right) \times \frac{15}{227} = \\ & \left( \frac{5}{24} - \frac{1}{18} + \frac{7}{30} \right) \times \frac{18}{139} = \frac{(75 - 20 + 84)}{360} \times \frac{18}{139} = \frac{139}{360} \times \frac{18}{139} = \\ & \left( \frac{11}{15} + \frac{7}{25} - \frac{1}{5} + \frac{7}{10} \right) \times \frac{15}{227} = \frac{(110 + 42 - 30 + 105)}{150} \times \frac{15}{227} = \frac{227}{150} \times \frac{15}{227} = \\ & \frac{139}{360} \times \frac{18}{139} = \frac{1}{20} \\ & \frac{227}{150} \times \frac{15}{227} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

جواب

مثال ۱۷: حاصل کسر زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{\frac{1}{1001} + \frac{3}{1001} + \frac{5}{1001} + \dots + 1}{1+3+5+\dots+1001}$$

$$\text{جواب صورت کسر: } \frac{1}{1001} + \frac{3}{1001} + \frac{5}{1001} + \dots + \frac{1001}{1001} = \frac{1+3+5+\dots+1001}{1001} = \frac{501^2}{1001}$$

$$(2n-1=1001 \Rightarrow 2n=1002 \Rightarrow n=501)$$

$$\text{جواب مخرج کسر: } 1+3+5+\dots+1001=501^2$$

$$A = \frac{\frac{501^2}{1001}}{\frac{501^2}{1}} = \frac{\cancel{501^2} \times 1}{\cancel{501^2} \times 1001} = \frac{1}{1001}$$

نکته: ترتیب عملیات در عدددهای گویا، مشابه ترتیب عملیات در عدددهای صحیح است.

مثال ۱۸: حاصل کسر زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{1\frac{17}{18} \times \left(1\frac{59}{70} + \frac{37}{42} + 2\frac{19}{30}\right) - 10}{14 - \left(49\frac{1}{3} \div 16 - 14 \div 8\frac{1}{6}\right) \times 7}$$

$$\text{جواب صورت کسر: } 1\frac{17}{18} \times \left(1\frac{59}{70} + \frac{37}{42} + 2\frac{19}{30}\right) - 10 = \frac{35}{18} \times \left(\frac{387+185+553}{210}\right) - 10 =$$

$$\left(\frac{35}{18} \times \frac{1125}{210}\right) - 10 = \frac{\cancel{35} \times \cancel{1125}}{\cancel{18} \times \cancel{210}} = \frac{125}{12} - 10 = \frac{125-120}{12} = \frac{5}{12} \quad (1)$$

$$\text{جواب مخرج کسر: } 14 - \left(49\frac{1}{3} \div 16 - 14 \div 8\frac{1}{6}\right) \times 7 = 14 - \left(\frac{148}{3} \div 16 - 14 \div \frac{49}{6}\right) \times 7 =$$

$$14 - \left(\frac{37}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{12}{7}\right) \times 7 = 14 - \left(\frac{37}{12} - \frac{12}{7}\right) \times 7 = 14 - \left(\frac{259-144}{12}\right) \times \frac{1}{7} =$$

$$14 - \frac{115}{12} = \frac{168 - 115}{12} = \frac{53}{12} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\frac{5}{12}}{\frac{53}{12}} = \frac{5 \times \cancel{12}}{\cancel{12} \times 53} = \frac{5}{53}$$



**نکته** ۷: اگر صورت و مخرج کسری را  $n$  برابر کنیم، حاصل کسر تغییری نمی‌کند. ولی مجموع و اختلاف صورت و مخرج آن نیز  $n$  برابر و حاصل ضرب صورت و مخرج آن  $n^2$  برابر می‌شود.



**مثال** ۱۹: کسری مساوی با  $\frac{154}{66}$  پیدا کنید که:

الف) مجموع صورت و مخرج آن  $150$  باشد.

$$\frac{154}{66} = \frac{7}{3}$$



**جواب** ابتدا کسر  $\frac{154}{66}$  را ساده می‌کنیم. لذا داریم:

$$7 + 3 = 10 \xrightarrow{\times 15} 150 \Rightarrow \text{صورت و مخرج کسر را در } 15 \text{ ضرب می‌کنیم.} \Rightarrow \frac{105}{45}$$

ب) تفاضل صورت و مخرج آن  $128$  باشد.

$$7 - 3 = 4 \xrightarrow{\times 32} 128 \Rightarrow \text{صورت و مخرج کسر را در } 32 \text{ ضرب می‌کنیم.} \Rightarrow \frac{224}{96}$$



ج) حاصل ضرب صورت و مخرج آن  $525$  باشد.

$$7 \times 3 = 21, \quad 525 \div 21 = 25 = 5^2$$



یعنی اگر صورت و مخرج کسر را  $5$  برابر کنیم، حاصل ضرب صورت و مخرج آن  $25$  برابر می‌شود. بنابراین کسر مورد نظر

$$\frac{7}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{35}{15}$$

برابر است با:



**مثال** ۲۰: به صورت کسری  $2$  واحد اضافه می‌کنیم و از مخرج آن  $2$  واحد کم می‌کنیم. کسر حاصل با کسر اولیه برابر

خواهد شد. کسر اولیه را بیابید.



**جواب** کسر مورد نظر را  $\frac{x}{y}$  در نظر می‌گیریم. لذا داریم:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+2}{y-2} \Rightarrow x(y-2) = y(x+2) \Rightarrow \cancel{xy} - 2x = \cancel{yx} + 2y \Rightarrow -2x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \frac{x}{y} = -1$$

روش‌های یافتن چند عدد گویا بین دو عدد گویا:

بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویا وجود دارد که برای پیدا کردن چند عدد گویا بین دو عدد گویا از سه روش مختلف می‌توان استفاده کرد:

**الف) روش هم‌مخرج کردن دو عدد گویا:** دو عدد را هم‌مخرج کرده و کسرهای مساوی با آن‌ها را می‌نویسیم. چنانچه صورت کسرهای حاصل متوالی باشند و نتوان کسری بین آن‌ها پیدا کرد، صورت و مخرج کسرهای حاصل را در یک واحد بیش‌تر از تعداد عددهای گویایی که باید پیدا کنیم، ضرب می‌کنیم تا بتوانیم بین دو کسر، به تعداد خواسته شده، عدد گویا بیابیم. (این روش را در کتاب مقدماتی بیان کردیم.)

**ب) روش مجموع صورت‌ها و مخرج‌های دو عدد گویا:** اگر  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  دو کسر دلخواه و  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه کسر  $\frac{a+c}{b+d}$  بین آن

دو کسر قرار دارد. یعنی:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$


**تذکر** باید دقت داشته باشیم که اگر بخواهیم تعداد بیش‌تری عدد گویا بین دو عدد داده شده پیدا کنیم، همین روش را برای هر دو عدد گویای متوالی انجام می‌دهیم.

**ج) روش میانگین دو عدد گویا:** می‌دانیم میانگین هر دو عدد دلخواه، بین آن دو عدد قرار دارد. از این مطلب می‌توانیم برای

پیدا کردن یک عدد گویا بین دو عدد گویا استفاده کنیم. یعنی:

$$\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$$


**مثال** ۲۱: بین دو عدد  $-\frac{7}{5}$  و  $-\frac{4}{3}$  سه عدد گویا بیابید. (به سه روش مختلف)



**جواب**

روش اول:

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{7}{5} = -\frac{21 \times 4}{15 \times 4} = -\frac{84}{60} \\ -\frac{4}{3} = -\frac{20 \times 4}{15 \times 4} = -\frac{80}{60} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{84}{60} < -\frac{83}{60} < -\frac{82}{60} < -\frac{81}{60} < -\frac{80}{60} \Rightarrow -\frac{7}{5} < -\frac{83}{60} < -\frac{82}{60} < -\frac{81}{60} < -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{7}{5} < -\frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{7}{5} < -\frac{7+4}{5+3} < -\frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{7}{5} < -\frac{11}{8} < -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

روش دوم:

$$-\frac{7}{5} < -\frac{7+11}{5+8} < -\frac{11}{8} < -\frac{11+4}{8+3} < -\frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{7}{5} < -\frac{18}{13} < -\frac{11}{8} < -\frac{15}{11} < -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{7}{5} < -\frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{7}{5} < \frac{\left(-\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right)}{2} < -\frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{7}{5} < -\frac{41}{30} < -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

روش سوم:

$$-\frac{7}{5} < \frac{\left(-\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{41}{30}\right)}{2} < -\frac{41}{30} < \frac{\left(-\frac{41}{30}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right)}{2} < -\frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{7}{5} < -\frac{113}{60} < -\frac{41}{30} < -\frac{11}{60} < -\frac{4}{3}$$

کسرهای تلسکوپی:

**تعریف** هر کسر که مخرج آن ضرب دو عدد و صورت آن اختلاف همان دو عدد باشد، کسر تلسکوپی نام دارد. این گونه کسرها را می توان به صورت تفریق دو کسر نوشت طوری که مخرج دو کسر، همان دو عدد و صورت دو کسر، ۱ باشد. مانند:

$$\frac{3}{5 \times 8} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$$

چنانچه در مخرج کسری ضرب دو عدد و صورت آن جمع همان دو عدد باشد، می توان کسر را به صورت جمع دو کسر

$$\frac{13}{5 \times 8} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8}$$

نوشت طوری که مخرج دو کسر، همان دو عدد و صورت دو کسر، ۱ باشد. مانند:

مثال ۲۲: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{99 \times 101} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5 \times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7 \times 9} = \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \\ \vdots \\ \frac{2}{99 \times 101} = \frac{1}{99} - \frac{1}{101} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{99 \times 101} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{101} = \frac{101 - 3}{303} = \frac{98}{303}$$

مثال ۲۳: حاصل عبارت زیر را به ساده ترین روش بیابید.

$$\frac{2}{5 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \frac{4}{10 \times 14} + \frac{5}{14 \times 19} + \frac{6}{19 \times 25} =$$



$$\frac{2}{5 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \frac{4}{10 \times 14} + \frac{5}{14 \times 19} + \frac{6}{19 \times 25} =$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{25} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{5-1}{25} = \frac{4}{25}$$

کسره‌های مسلسل:



هر کسر به شکل  $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$  را یک کسر مسلسل می‌نامند که بر دو نوع کسره‌های مسلسل

متناهی و نامتناهی می‌باشد. برای حل این‌گونه کسرها معمولاً از پایین‌ترین کسر شروع به حل می‌کنیم تا به بالاترین کسر برسیم.



$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} =$$

۲۴: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.



$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{4}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{7}} = 1 + \frac{1}{\frac{11}{7}} = 1 + \frac{7}{11} = \frac{18}{11}$$



۲۵: حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{3+2-7}}}} =$$



$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{3+2-7}}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{-2}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} =$$



(ب) نماد اعشاری متناوب: اگر نماد اعشاری یک کسر متعارفی، تحقیقی مختوم نباشد، دو حالت وجود دارد:

(۱) نماد اعشاری متناوب ساده: چنانچه در تجزیه‌ی مخرج کسر، هیچ‌یک از شمارنده‌های ۲ و ۵ ظاهر نشود، در این صورت نماد اعشاری کسر را نماد اعشاری متناوب ساده می‌گویند. برای تبدیل این‌گونه کسرها به عدد اعشاری، کافی است صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم. پس از تقسیم مشاهده می‌کنیم که یک یا چند عدد در خارج‌قسمت تقسیم و بعد از ممیز به‌طور متوالی تکرار می‌شوند. چنین عددهایی را عددهای اعشاری متناوب ساده می‌نامند و رقم‌هایی که تکرار می‌شوند را رقم‌های دوره‌ی گردش می‌نامند. برای نشان دادن دوره‌ی گردش، بالای رقم یا رقم‌هایی که دوره‌ی گردش دارند، یک خط کوچک می‌گذاریم.

مثال ۲۸: نماد اعشاری کسرهای  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{13}{11}$  را بنویسید.



$$\begin{array}{r}
 2/000 \quad | \quad 3 \\
 - 1/8 \\
 \hline
 0/20 \\
 - 0/18 \\
 \hline
 0/020 \\
 - 0/018 \\
 \hline
 0/002
 \end{array}
 \Rightarrow \frac{2}{3} = 0/\overline{6}$$

رقم ۶، رقم دوره‌ی گردش است.

$$\begin{array}{r}
 13/0000 \quad | \quad 11 \\
 - 11 \\
 \hline
 2/0 \\
 - 1/1 \\
 \hline
 0/90 \\
 - 0/88 \\
 \hline
 0/020 \\
 - 0/011 \\
 \hline
 0/0090 \\
 - 0/0088 \\
 \hline
 0/0002
 \end{array}
 \Rightarrow \frac{13}{11} = 1/\overline{18}$$

دو رقم ۱ و ۸، رقم‌های دوره‌ی گردش هستند.



۲) نماد اعشاری متناوب مرکب: چنانچه در تجزیه‌ی مخرج کسر، یکی از شمارنده‌های ۲ و ۵ به همراه شمارنده‌ی دیگری به غیر از این عددها ظاهر شوند، در این صورت نماد اعشاری کسر را نماد اعشاری متناوب مرکب می‌نامند. برای تبدیل این‌گونه کسرها به عدد اعشاری، کافی است صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم. پس از تقسیم مشاهده می‌کنیم که ابتدا یک یا دو عدد در خارج‌قسمت تقسیم و بعد از ممیز ظاهر می‌شوند که به آن‌ها رقم‌های غیر دوره‌ی گردش می‌گویند. سپس بعد از این رقم‌ها، رقم‌های تکراری ظاهر می‌شوند که به آن‌ها رقم‌های دوره‌ی گردش می‌گویند.

مثال ۲۹: نماد اعشاری کسرهای  $\frac{19}{15}$  و  $-\frac{17}{55}$  را بنویسید.



$$\begin{array}{r} 19/000 \quad | \quad 15 \\ - 15 \quad \quad | \quad 1/266\dots \\ \hline 4/0 \\ - 3/0 \\ \hline 1/00 \\ - 0/90 \\ \hline 0/100 \\ - 0/090 \\ \hline 0/010 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{19}{15} = 1/2\overline{6}$$

رقم ۲، رقم غیر دوره‌ی گردش و رقم ۶، رقم دوره‌ی گردش می‌باشد.

$$\begin{array}{r} 17/0000000 \quad | \quad 55 \\ - 16/5 \quad \quad | \quad 0/30909000\dots \\ \hline 0/500 \\ - 0/495 \\ \hline 0/00500 \\ - 0/00495 \\ \hline 0/000050 \end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{17}{55} = -0/3\overline{09}$$

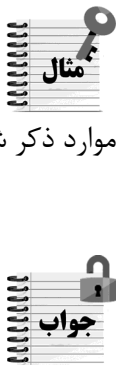
رقم ۳، رقم غیر دوره‌ی گردش و دو رقم ۰ و ۹، رقم‌های دوره‌ی گردش می‌باشند.

مثال ۳۰: نماد اعشاری هریک از کسرهای متعارفی زیر را به‌دست آورید و تحقیق کنید نماد اعشاری حاصل کدام‌یک از

موارد ذکر شده است؟

الف)  $\frac{15}{24}$

نماد اعشاری تحقیقی مختوم  $\frac{15}{24} = \frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} \times \frac{5^2}{5^2} = \frac{5 \times 5^2}{10^3} = \frac{625}{1000} = 0/625$



ب)  $\frac{2}{9}$

$$\begin{array}{r} 2/000 \quad | \quad 9 \\ - 1/8 \quad | \quad 0/22... \\ \hline 0/20 \\ - 0/18 \\ \hline 0/02 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} = 0/\overline{2}$$

نماد اعشاری متناوب ساده



ج)  $\frac{37}{30}$

$$\begin{array}{r} 37/000 \quad | \quad 30 \\ - 30 \quad | \quad 1/233... \\ \hline 7/0 \\ - 6/0 \\ \hline 1/00 \\ - 0/90 \\ \hline 0/100 \\ - 0/090 \\ \hline 0/010 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{37}{30} = 1/\overline{23}$$

نماد اعشاری متناوب مرکب



د)  $-\frac{13}{27}$

$$\begin{array}{r} 13/000 \quad | \quad 27 \\ - 10/8 \quad | \quad 0/481... \\ \hline 2/20 \\ - 2/16 \\ \hline 0/040 \\ - 0/027 \\ \hline 0/013 \end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{13}{27} = -0/\overline{481}$$

نماد اعشاری متناوب ساده





مثال ۳۱: بدون انجام عمل تقسیم بررسی کنید که کدام یک از کسره‌های زیر، تحقیقی، متناوب ساده و متناوب مرکب است؟

$$\frac{5}{24}, \frac{23}{80}, \frac{14}{9}$$

$$24 = 2^3 \times 3 \Rightarrow \frac{5}{24} \quad \text{متناوب مرکب}$$

$$80 = 2^4 \times 5 \Rightarrow \frac{23}{80} \quad \text{اعشاری تحقیقی مختوم}$$

$$9 = 3^2 \Rightarrow \frac{14}{9} \quad \text{متناوب ساده}$$



نمایش کسری عددهای اعشاری:

با توجه به نوع نماد اعشاری، برای تبدیل عدد اعشاری به عدد گویا، سه حالت وجود دارد:

الف) تبدیل عدد اعشاری تحقیقی مختوم به عدد گویا: در این حالت عدد را بدون در نظر گرفتن ممیز در صورت کسر نوشته و به تعداد رقم‌های اعشاری عدد، در مخرج کسر جلوی عدد ۱، رقم صفر می‌گذاریم.



مثال ۳۲: عددهای  $\frac{3}{7}$  و  $0.42$  را به عدد گویا تبدیل کنید.

$$\frac{3}{7} = \frac{37}{10}, \quad 0.42 = -\frac{42}{1000}$$



ب) تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به عدد گویا: در این حالت، رقم‌هایی را که دارای دوره‌ی گردش هستند، در صورت کسر نوشته و در مخرج کسر، به تعداد رقم‌های دوره‌ی گردش، رقم ۹ قرار می‌دهیم.



مثال ۳۳: نمایش کسری عددهای  $\frac{0}{3}$  و  $\frac{0}{12}$  و  $\frac{0}{154}$  را بنویسید.

$$\frac{0}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad \frac{0}{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}, \quad -\frac{0}{154} = -\frac{154}{999}$$



ج) تبدیل عدد اعشاری متناوب مرکب به عدد گویا: در این حالت، رقم‌های غیر دوره‌ی گردش را از کل عدد اعشاری کم می‌کنیم و در صورت کسر قرار می‌دهیم، سپس در مخرج کسر به تعداد رقم‌های دوره‌ی گردش، رقم ۹ و جلوی آن به تعداد رقم‌های غیر دوره‌ی گردش، رقم صفر قرار می‌دهیم.



مثال ۳۴: نمایش کسری عددهای  $\frac{0}{253}$  و  $\frac{0}{1427}$  را بنویسید.

$$\frac{0}{253} = \frac{253-2}{990} = \frac{251}{990}, \quad -\frac{0}{1427} = -\frac{1427-14}{9900} = -\frac{1413}{9900} = -\frac{157}{1100}$$





۳۵: هریک از نمادهای اعشاری زیر را به کسر متعارفی تحویل ناپذیر تبدیل کنید.

الف)  $3/\overline{752}$

$$3/\overline{752} = 3 \frac{752-7}{990} = 3 \frac{745}{990} = 3 \frac{149}{198} = \frac{743}{198}$$

ب)  $0/\overline{057}$

$$0/\overline{057} = \frac{57}{990} = \frac{19}{330}$$

ج)  $0/\overline{126}$

$$0/\overline{126} = \frac{126}{999} = \frac{14}{111}$$

د)  $0/\overline{842}$

$$0/\overline{842} = \frac{842}{1000} = \frac{421}{500}$$



۸: در تساوی دو کسر همواره داریم:

$$۱) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

$$۲) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$۳) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$۴) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

$$۵) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$۶) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$۷) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

$$۸) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$



۹: در تساوی بیش تر از سه کسر، رابطه‌ی زیر همواره برقرار است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots \Rightarrow \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$$

مثال ۳۶: اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، ثابت کنید:  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ .

جواب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+c} = \frac{b}{b+d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

مثال ۳۷: اگر  $\frac{a+4}{4} = \frac{b+7}{7}$ ، حاصل  $\frac{a}{b}$  را بیابید.

جواب  $\frac{a+4}{4} = \frac{b+7}{7} \Rightarrow \frac{a+4-4}{4} = \frac{b+7-7}{7} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{7} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{7}$

مثال ۳۸: اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، ثابت کنید:  $\frac{2a+3c}{2b+3d} = \frac{a}{b}$ .

جواب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{3c}{3d} \Rightarrow \frac{2a+3c}{2b+3d} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$

مثال ۳۹: اگر  $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{11}$ ، آن‌گاه حاصل  $\frac{5a+4b}{3c}$  را بیابید.

جواب فرض می‌کنیم  $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{11} = m$ . عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را بر حسب  $m$  می‌نویسیم. لذا داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{3} = m \Rightarrow a = 3m \\ \frac{b}{5} = m \Rightarrow b = 5m \\ \frac{c}{11} = m \Rightarrow c = 11m \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5a+4b}{3c} = \frac{5(3m)+4(5m)}{3(11m)} = \frac{15m+20m}{33m} = \frac{35m}{33m} = \frac{35}{33}$$

مثال ۴۰: اگر  $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$  و  $\frac{c}{d} = \frac{8}{5}$ ، آن‌گاه حاصل  $\frac{2ac+5bd}{3bd-ac}$  را بیابید.

جواب  $\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{4}{9}b \\ \frac{c}{d} = \frac{8}{5} \Rightarrow c = \frac{8}{5}d \end{array} \right\} \Rightarrow ac = \left(\frac{4}{9}b\right)\left(\frac{8}{5}d\right) = \frac{32}{45}bd$

$$\frac{2ac+5bd}{3bd-ac} = \frac{2\left(\frac{32}{45}bd\right)+5bd}{3bd-\left(\frac{32}{45}bd\right)} = \frac{\frac{64}{45}bd+5bd}{3bd-\frac{32}{45}bd} = \frac{\frac{289}{45}bd}{\frac{103}{45}bd} = \frac{289}{103}$$



نکته

۱۰: چنانچه در مسئله‌ای چند تخفیف متوالی داده شده باشد، برای محاسبه‌ی درصد تخفیف نهایی باید درصد پرداختی هریک از تخفیف‌ها را محاسبه کرده و در هم ضرب کنیم (حاصل را برحسب ۱۰۰٪ محاسبه کنیم)، سپس حاصل را از ۱۰۰٪ کم کنیم.



مثال

۴۱: کالایی را با چهار تخفیف متوالی ۱۰٪، ۱۲٪ و ۱۵٪ خریداری کردیم. چند درصد تخفیف گرفته‌ایم؟



جواب

درصد پرداختی  $10\% \Rightarrow 100\% - 10\% = 90\%$  تخفیف

درصد پرداختی  $12\% \Rightarrow 100\% - 12\% = 88\%$  تخفیف

درصد پرداختی  $15\% \Rightarrow 100\% - 15\% = 85\%$  تخفیف

$$\frac{90}{100} \times \frac{88}{100} \times \frac{85}{100} = \frac{673200}{1000000} = \frac{6732}{10000} = \frac{67}{32} = 67/32\%$$

درصد پرداختی نهایی

$$100\% - 67/32 = 32/68$$

درصد تخفیف نهایی



مثال

۴۲: قیمت کتابی ۱۵۰۰۰ تومان می‌باشد. فروشنده این کتاب را با دو تخفیف متوالی ۱۰٪ و ۲۰٪ فروخت. قیمت خرید کتاب را حساب کنید.



جواب

درصد پرداختی  $10\% \Rightarrow 100\% - 10\% = 90\%$  تخفیف

درصد پرداختی  $20\% \Rightarrow 100\% - 20\% = 80\%$  تخفیف

$$\frac{90}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{7200}{10000} = 72\%$$

درصد پرداختی نهایی

$$\frac{72}{100} = \frac{x}{15000} \Rightarrow x = \frac{72 \times 15000}{100} = 10800$$

قیمت خرید کتاب



نکته

۱۱ (حل مسائل مربوط به تعداد دور چرخ و شعاع (محیط) چرخ): اگر متحرکی دارای دو چرخ با اندازه‌های مختلف باشد، به‌طوری که شعاع (محیط) چرخ کوچک  $R_1$  و تعداد دور آن  $N_1$ ، شعاع (محیط) چرخ بزرگ  $R_2$  و تعداد دور آن  $N_2$  باشد، بین این چهار مقدار رابطه‌ی زیر برقرار است که برای به‌دست آوردن مقدار یکی از این چهار مجهول نیز از این رابطه استفاده می‌شود:

$$N_1 R_1 = N_2 R_2$$

این رابطه از تناسب معکوس بین این چهار مقدار به‌دست آمده است.



**مثال ۴۳:** دو چرخ از طریق یک تسمه به هم متصل‌اند. شعاع چرخ کوچک ۳۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ بزرگ ۴۰ سانتی‌متر است. اگر چرخ بزرگ ۶۰ دور بزند، چرخ کوچک چند دور می‌زند؟



$$R_1 = 30 \text{ cm} \quad , \quad R_2 = 40 \text{ cm} \quad , \quad N_2 = 60 \text{ دور}$$

$$N_1 R_1 = N_2 R_2 \Rightarrow 30 N_1 = 40 \times 60 \Rightarrow 30 N_1 = 2400 \Rightarrow N_1 = \frac{2400}{30} = 80 \text{ دور}$$



**نکته ۱۲ (حل مسائل مربوط به شیرهای آب):** اگر شیر  $A_1$  منبعی را در  $a_1$  ساعت، شیر  $A_2$  در  $a_2$  ساعت، شیر  $A_3$  در  $a_3$  ساعت، ... به تنهایی پر کنند و همچنین این منبع شیرهای تخلیه‌ای نیز داشته باشد که شیر  $B_1$  منبع پر را در  $b_1$  ساعت، شیر  $B_2$  منبع پر را در  $b_2$  ساعت، شیر  $B_3$  منبع پر را در  $b_3$  ساعت، ... به تنهایی تخلیه کنند و اگر همه‌ی شیرهای آب و تخلیه با هم باز باشند و بخواهیم زمان پر شدن منبع را که برابر  $t$  است، به دست آوریم، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{t} = \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots \right) - \left( \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots \right)$$



**مثال ۴۴:** استخری ۳ شیر آب دارد که هر یک به تنهایی استخر را در ۴، ۶ و ۸ ساعت پر می‌کنند و این استخر نیز یک شیر تخلیه دارد که استخر پر را در ۲ ساعت خالی می‌کند. اگر همه‌ی شیرها با هم باز باشند، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟



$$\frac{1}{t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{6+4+3-12}{24} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{24} \Rightarrow t = 24$$

استخر در ۲۴ ساعت پر می‌شود.



**نکته ۱۳ (حل مسائل مربوط به سرعت متوسط رفت و برگشت یک متحرک):** متحرکی مسیری را با سرعت  $v_1$  می‌پیماید و همان مسیر را با سرعت  $v_2$  برمی‌گردد. سرعت متوسط این متحرک در رفت و برگشت، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V_{\text{متوسط}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

مثال

۴۵: اتومبیلی مسیری را با سرعت ۴۰ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند و همان مسیر را با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت برمی‌گردد. سرعت متوسط این اتومبیل چه قدر است؟

جواب

$$v_1 = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \quad v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$V_{\text{متوسط}} = \frac{2 \times 40 \times 60}{40 + 60} = \frac{4800}{100} = 48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

نکته

۱۴ (حل مسائل مربوط به اسید و آب): برای این که بدانیم به  $p$  لیتر الکل  $m\%$  چند لیتر آب اضافه کنیم تا الکل  $n\%$  حاصل شود و مقدار آب اضافه شده را  $x$  در نظر بگیریم، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{p \times m}{n}$$

که این رابطه از تناسب معکوس بین این چهار مقدار به دست آمده است. (زیرا با افزایش حجم اسید، درصد آن کاهش می‌یابد.)

مثال

۴۶: به ۱۰ لیتر اسید ۷۵٪ چند لیتر آب اضافه کنیم تا اسید ۵۰٪ به دست آید؟

جواب

$$x = \frac{10 \times 75}{50} = 15 \text{ لیتر آب}$$





۱- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$k = (-5) + (-1) + 3 + 7 + 11 + \dots + 3995$$

۲- کسر مولد هر یک از عددهای اعشاری زیر را بیابید.

الف)  $0.\overline{71532}$

ب)  $0.\overline{63}$

ج)  $0.\overline{561}$

د)  $0.\overline{231}$

۳- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$2 \div \frac{2 + \frac{2+1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2-1}}}}}}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2-1}}} =$$

۴- بین دو کسر  $\frac{20}{21}$  و  $\frac{21}{22}$  پنج کسر بیابید. (به دو روش مختلف)

۵- اگر  $\frac{ac - 2bd}{5ac - bd} = \frac{3}{7}$  و  $\frac{c}{d} = \frac{3}{2}$ ، مقدار  $\frac{a}{b}$  چه قدر است؟



دانش آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های بیش‌تر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.