بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه

مقدماتی

تألیف: دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان

نظارت عالی: علی خزایی

سرشناسه	: خزائی، علی، ۱۳۴۸ -
عنوان و نام پدیدآور	: ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه مقدماتی
مشخصات نشر	: تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری	: ۲۱۲ ص.؛ رحلی.
شابک	: 978-600-7903-94-0
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۸۳۲۰۵۸

نام کتاب:	**ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه مقدماتی**
تألیف:	**دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان**
شابک:	**۹۷۸ـ۶۰۰ـ۷۹۰۳ـ۹۴ـ۰**
	ISBN:978-600-7903-94-0
نوبت چاپ:	**چاپ دوم ـ ۱۳۹۷**
تیراژ:	**۱۰۰۰ جلد**

تعداد صفحات: ۲۱۲ صفحه

قیمت: ۳۲۰۰۰ تومان

ناشر: موسسه کانون ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز پخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)

فروشگاه دائمی: تهران - میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی – نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳

پیش‌گفتار

گستردگی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف ازجمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری، افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه‌ی امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به‌عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

۱) **مجموعه کتاب‌های «تابستانه»:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

۲) **مجموعه کتاب‌های «مقدماتی»:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۳) **مجموعه کتاب‌های «پیشرفته»:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

۴) **مجموعه کتاب‌های «جامع»:** این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و سؤالات تشریحی و چهارگزینه‌ای بدون پاسخ در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۵) مجموعه کتاب‌های «تیزهوشان»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول پیشنهاد می‌گردد.

۶) مجموعه کتاب‌های «موضوعی»: این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

۷) مجموعه کتاب‌های «یکی من، یکی تو»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤالات «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یکدیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به‌ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

۸) مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به‌صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته (برای مقاطع ابتدایی و متوسطه اول) و در دو شکل تشریحی و چهارگزینه‌ای (برای مقطع متوسطه دوم) در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمونی از آن فصل به‌عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش فرهنگ ریاضی

مقدمه

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

حضرت محمد (ص):

فقری سخت‌تر از نادانی و ثروتی بالاتر از خردمندی و عبادتی والاتر از تفکر نیست.

خداوند بزرگ را سپاس می‌گوییم که نعمت اندیشیدن را به همگان عطا فرمود تا در پرتو آن، انسان مسیر صحیح زیستن را آموخته و به دیگران نیز بیاموزد.

یکی از راهبردهای مهم یادگیری، آموزش دقیق مفاهیم و انجام تمرین‌های متناسب با اصول یادگیری و تکرار آن است. در این راستا، داشتن منبع مناسب برای یادگیری و درک بیش‌تر و همچنین نمونه سؤالات مناسب و متنوع برای تمرین، می‌تواند یکی از عوامل مهم موفقیت در یادگیری و پیشرفت علمی دانش‌آموزان باشد.

کتابی که در مقابل چشمان جستجوگر شما قرار دارد، بر مبنای نظام آموزشی کانون ریاضیدانان زمان و در جهت تکمیل کتاب‌های زنجیروار آن (تابستانه ← مقدماتی ← پیشرفته) که متناسب با مفاهیم و مطالب کتاب درسی ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه است، همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی به شرح زیر گردآوری شده است:

- ❋ تدریس در سطح مقدماتی با روشی کلاسیک و دسته‌بندی و تشریح کامل مطالب
- ❋ ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب
- ❋ ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با حل تشریحی
- ❋ تمرین‌های پایان هر فصل

امید است این کتاب، کمک شایانی به موفقیت همه‌ی معلمین گرامی و دانش‌آموزان عزیز بنماید.

دپارتمان متوسطه اول

فهرست مطالب

سیمای فصل اول

- مجموعه‌ها
  - معرفی مجموعه
  - تعریف مجموعه
  - تعریف عضو
  - عضویت یک شیء در یک مجموعه
  - انواع مجموعه‌ها
    - مجموعه‌های پایان‌پذیر
    - مجموعه‌های پایان‌ناپذیر
  - نمایش مجموعه‌ها
    - نمایش مجموعه‌ها با نوشتن عضوها
    - نمایش مجموعه‌ها با نمودار ون
    - نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی
  - مجموعه‌های اعداد
    - مجموعه‌ی عددهای طبیعی
    - مجموعه‌ی عددهای حسابی
    - مجموعه‌ی عددهای صحیح
    - مجموعه‌ی عددهای گویا
  - مجموعه‌ی تهی
  - مجموعه‌های مساوی
  - زیرمجموعه
    - روش نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه
  - اعمال روی مجموعه‌ها
    - اشتراک دو مجموعه
    - اجتماع دو مجموعه
    - تفاضل دو مجموعه
  - مجموعه‌ها و احتمال
  - پیشامد تصادفی و پیشامدهای هم‌شانس
  - تمرین‌های فصل اول

معرفی مجموعه:

تعریف **به دسته یا گروهی از اشیاء، انسان‌ها، حیوانات، گل‌ها، اعداد و ... که دارای حداقل یک ویژگی مشترک باشند، مجموعه می‌گوییم. مانند:**

مجموعه‌ی دانش‌آموزان یک کلاس (ویژگی مشترک: همگی دانش‌آموز هستند.)

مجموعه‌ی پرستاران یک بیمارستان (ویژگی مشترک: همگی پرستار هستند.)

مجموعه‌ی گل‌های قرمز (ویژگی مشترک: همگی گل قرمز هستند.)

مجموعه‌ی عددهای دو رقمی (ویژگی مشترک: همگی عدد دو رقمی هستند.)

مجموعه‌ی حروف الفبای فارسی (ویژگی مشترک: همگی حروف الفبای فارسی هستند.)

تعریف **به هریک از اعداد، اشیاء، حروف و ... که یک مجموعه را تشکیل می‌دهند، عضو مجموعه می‌گویند. عضوهای یک مجموعه را با « , » از هم جدا می‌کنند.**

نکته ۱: عضوهای یک مجموعه را داخل دو آکولاد (یعنی { }) قرار می‌دهیم. باید توجه داشته باشیم که نماد{ }، با پرانتز ( ) یا کروشه [ ] اشتباه گرفته نشود.

نکته ۲: برای نام‌گذاری مجموعه‌ها از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنند.

مثال ۱:

A = { ۲ , ۵ , ۸ , ۱۰ }

B = {الف , ب , پ , ت}

C = {زهرا , مریم , سارا}

D = { a , b , c , d , e , f , g , h }

نکته ۳: در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای یک مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی ساخته نمی‌شود. همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی ساخته نمی‌شود. به‌عنوان مثال، مجموعه‌های { ۳ , ۳ , ۸ } ، { ۸ , ۳ } و { ۳ , ۸ } با هم مساوی‌اند.

مثال ۲: تعداد عضوهای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A=\left\{۳,۴,\frac{۶}{۲},۷,\frac{۱۲}{۳}\right\}$

جواب مجموعه‌ی A با مجموعه‌ی $A=\{۳,۴,۷\}$ برابر است که تعداد عضوهای آن برابر با ۳ می‌باشد.

$\frac{۶}{۲}=۳ \quad , \quad \frac{۱۲}{۳}=۴$

ب) $B=\left\{-۲,۹,۴/۴,\frac{۱۸}{۲},\frac{-۶}{۳},۲۳,\frac{۲۲}{۵}\right\}$

جواب مجموعه‌ی B با مجموعه‌ی $B=\{-۲,۹,۴/۴,۲۳\}$ برابر است که تعداد عضوهای آن برابر با ۴ می‌باشد.

$\frac{۱۸}{۲}=۹ \quad , \quad ۴/۴=\frac{۲۲}{۵} \quad , \quad \frac{-۶}{۳}=-۲$

نکته ۴ : در ریاضیات، از مجموعه برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری) استفاده می‌کنند.

نکته ۵: لزومی ندارد که عضوهای یک مجموعه، ارتباط خاصی با هم داشته باشند. مانند مجموعه‌ی زیر:

{ ج , ب , ۸ , ۵ , a , x , فاطمه , علی }

نکته ۶: تنها عبارت‌هایی می‌توانند یک مجموعه را تشکیل دهند که برای ما انسان‌ها به‌طور دقیق مشخص شده باشند.
به‌عنوان مثال، عبارت «انسان‌های قدبلند» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. زیرا چنین انسان‌هایی به‌طور دقیق مشخص نشده‌اند و برای برخی از انسان‌ها نمی‌توانیم بگوییم که قدبلند هستند یا خیر.

مثال ۳: کدام‌یک از عبارت‌های داده شده، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰

جواب عبارت داده شده، یک مجموعه را مشخص می‌کند. زیرا عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰، برای تمام افرادی که با عددهای طبیعی آشنایی دارند، مشخص است. نمایش این مجموعه به‌صورت زیر است:

{ ... , ۱۰۰۰۰۳ , ۱۰۰۰۰۲ , ۱۰۰۰۰۱ }

ب) عددهای بسیار کوچک

جواب عبارت داده شده، یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. زیرا عددهای بسیار کوچک مشخص نیستند و دو فرد مختلف، نظرات متفاوتی راجع به عددهای بسیار کوچک دارند.

ج) پرستاران یک بیمارستان

جواب عبارت داده شده، یک مجموعه را مشخص می‌کند. زیرا پرستاران یک بیمارستان، برای تمام افرادی که با پرستاران یک بیمارستان آشنایی دارند، مشخص است.

د) انسان‌های باهوش

جواب عبارت داده شده، یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. زیرا صفت باهوش، مشخص نیست و دو فرد مختلف، نظرات متفاوتی راجع به انسان‌های باهوش دارند.

ه) عددهای اول کوچک‌تر از ۲۰

جواب عبارت داده شده، یک مجموعه را مشخص می‌کند. زیرا عددهای اول، برای تمام افرادی که با عددهای اول آشنایی دارند، مشخص است. نمایش این مجموعه به‌صورت زیر است:

$\{ ۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۱ , ۱۳ , ۱۷ , ۱۹ \}$

عضویت یک شیء در یک مجموعه:

برای این‌که نشان دهیم عضوی متعلق به یک مجموعه است، از نماد $\in$ و برای این‌که نشان دهیم عضوی به یک مجموعه تعلق ندارد، از نماد $\notin$ استفاده می‌کنیم.

نکته ۷: از نماد $\in$ یا $\notin$ زمانی استفاده می‌شود که سمت چپ این نمادها، عضو و سمت راست آن‌ها، مجموعه قرار داشته باشد.

مثال ۴: مجموعه‌ی $A = \{۲,۸,۹,۱۱\}$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$۲ \in A \longrightarrow$ (می‌خوانیم: ۲ عضو A است.)

$۹ \in A \longrightarrow$ (می‌خوانیم: ۹ عضو A است.)

$۱۴ \notin A \longrightarrow$ (می‌خوانیم: ۱۴ عضو A نیست.)

مثال ۵: اگر داشته باشیم:

$$A = \{-۲ , ۷, a , x\} \quad , \quad B = \left\{\frac{۱}{۳} , ۵ , ۸, g\right\}$$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

☐ $۸ \in B$	☐ $\frac{۱}{۳} \notin B$	☐ $۷ \in A$
☐ $x \in A$	☐ $-۲ \in A$	☐ $g \notin B$

جواب

✓ $۸ \in B$	✗ $\frac{۱}{۳} \notin B$	✓ $۷ \in A$
✓ $x \in A$	✓ $-۲ \in A$	✗ $g \notin B$

انواع مجموعه‌ها:

مجموعه‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف) مجموعه‌های پایان‌پذیر:

مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن مشخص و قابل شمارش باشد، مجموعه‌ی پایان‌پذیر یا مجموعه‌ی متناهی نامیده می‌شود. مانند مجموعه‌ی $A = \{۱ , ۴ , ۶ , ۱۱\}$ که تعداد عضوهای آن برابر با ۴ است.

ب) مجموعه‌ی پایان‌ناپذیر :

مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن نامشخص و غیرقابل شمارش باشد، مجموعه‌ی پایان‌ناپذیر یا مجموعه‌ی نامتناهی نامیده می‌شود. مانند مجموعه‌ی $B = \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ...\}$ که مجموعه‌ی عددهای فرد را نشان می‌دهد و تعداد عضوهای آن نامشخص است.

نکته ۸: در برخی از مجموعه‌های پایان‌پذیر و پایان‌ناپذیر، برای خودداری کردن از نوشتن تمامی عضوهای مجموعه، از سه نقطه (...) استفاده می‌کنند. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۵۰ را که مجموعه‌ای پایان‌پذیر است، می‌توانیم به‌صورت $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ... , ۵۰\}$ و مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۳ را که مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است، می‌توانیم به‌صورت $B = \{۳ , ۶ , ۹ , ۱۲ , ...\}$ نشان دهیم.

نمایش مجموعه‌ها:

برای نمایش یک مجموعه، سه روش وجود دارد:

۱- نمایش مجموعه‌ها با نوشتن عضوها: با فهرست کردن و نوشتن عضوهای مجموعه (و یا نوشتن تعدادی از عضوهای مجموعه‌های پایان‌پذیر که دارای نظم خاصی هستند) می‌توانیم آن مجموعه را نمایش دهیم.

مثال ۶: مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی عددهای اول یک رقمی

جواب

$\{۲ , ۳ , ۵ , ۷\}$

ب) مجموعه‌ی عددهای طبیعی مضرب ۳

جواب

{ ۳ , ۶ , ۹ , ... }

ج) مجموعه‌ی عددهای صحیح بین ۴- و ۵

جواب

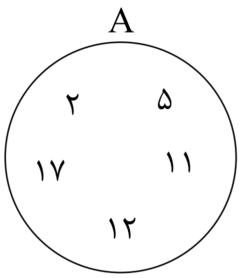
{ ۳- , ۲- , ۱- , ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ }

د) مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد ۶۰

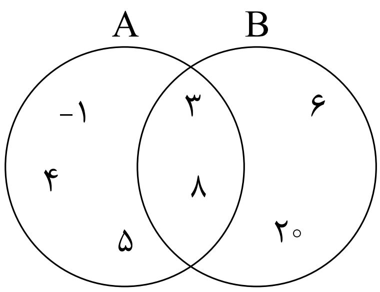
جواب

{ ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۱۰ , ۱۲ , ۱۵ , ۲۰ , ۳۰ , ۶۰ }

۲- نمایش مجموعه‌ها با نمودار وِن: یک مجموعه‌ی پایان‌پذیر را می‌توانیم با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته‌ی بسته نمایش دهیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی $A=\{۲ , ۵ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۷\}$ را می‌توانیم به‌صورت زیر نمایش دهیم:



مثال ۷: با توجه به نمودار زیر، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.



جواب

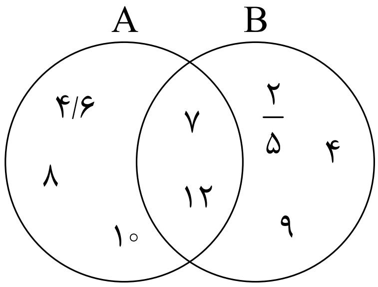
$A=\{۱- , ۳ , ۴ , ۵ , ۸\}$

$B=\{۳ , ۶ , ۸ , ۲۰\}$

مثال ۸: دو مجموعه‌ی $A=\left\{\frac{۲}{۵} , ۴ , ۷ , ۹ , ۱۲\right\}$ و $B=\{۴/۶ , ۷ , ۸ , ۱۰ , ۱۲\}$ را درنظر بگیرید:

الف) دو مجموعه را با یک نمودار وِن نمایش دهید.

جواب



ب) کدام عددها هم در منحنی بسته‌ی مربوط به A و هم در منحنی بسته‌ی مربوط به B قرار دارند؟

جواب عددهای ۷ و ۱۲ در هر دو منحنی قرار دارند.

۳- نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی: برای نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی، کافی است رابطه‌ی مشترک بین عضوهای مجموعه را به‌صورت یک عبارت ریاضی بنویسیم.

تذکر **روش یافتن رابطه‌ی مشترک بین تعدادی عدد را سال‌های گذشته در الگوهای عددی و یافتن جمله‌ی n ام آن‌ها بیان کردیم.**

قبل از این‌که چند مثال در خصوص نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی ارائه دهیم، ابتدا لازم است نمایش مجموعه‌های عددهایی را که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌ایم، بیان کنیم.

مجموعه‌های اعداد:

الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی: این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است که عضوهای آن از ۱ شروع می‌شود و تا بی‌نهایت ادامه دارد. مجموعه‌ی عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$$

نکته **۹:** مجموعه‌ی $\{ ... , ۸ , ۶ , ۴ , ۲ \} = E$ مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$E=\{۲k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

و می‌خوانیم: E برابر است با مجموعه‌ی عددهایی به شکل $۲k$ به‌طوری که k متعلق به مجموعه‌ی عددهای طبیعی است.

نکته ۱۰: مجموعه‌ی $O = \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ...\}$ مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$O = \{۲k - ۱ | k \in \mathbb{N}\}$$

و می‌خوانیم: O برابر است با مجموعه‌ی عددهایی به شکل $۲k - ۱$ به‌طوری که k متعلق به مجموعه‌ی عددهای طبیعی است.

تذکر در نمایش دو مجموعه‌ی بالا (مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج و فرد)، علامت «|» خوانده می‌شود: «به‌طوری که».

ب) مجموعه‌ی عددهای حسابی: این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است که عضوهای آن از صفر شروع می‌شود و تا بی‌نهایت ادامه دارد. مجموعه‌ی عددهای حسابی را با $\mathbb{W}$ یا $\mathbb{I}$ و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$\mathbb{W}$ یا $\mathbb{I} = \{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ...\}$ **یا** $\{k - ۱ | k \in \mathbb{N}\}$

ج) مجموعه‌ی عددهای صحیح: این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است که عضوهای آن شامل عددهای مثبت، منفی و عدد صفر است. مجموعه‌ی عددهای صحیح را با $\mathbb{Z}$ و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Z} = \{ ... , -۳ , -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ...\}$$

د) مجموعه‌ی عددهای گویا: این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است. ازآنجاکه اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، لذا نمی‌توان این مجموعه را با عضوها مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه‌ی عددهای گویا را با نمادهای ریاضی و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} , b \neq ۰ \right\}$$

این مجموعه را می‌خوانیم: $\mathbb{Q}$ برابر است با مجموعه‌ی عددهایی به شکل $\frac{a}{b}$ به‌طوری که a و b متعلق به مجموعه‌ی عددهای صحیح می‌باشند و b مخالف صفر است.

مثال ۹: مجموعه‌های داده شده را با نمادهای ریاضی مشخص کنید.

الف) $A = \{۵ , ۱۰ , ۱۵ , ۲۰ , ...\}$

جواب مجموعه‌ی A، مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۵ است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A = \{۵k | k \in \mathbb{N}\}$$

این مجموعه را می‌خوانیم: A برابر است با مجموعه‌ی عددهایی به شکل $۵k$ به‌طوری که k متعلق به مجموعه‌ی عددهای طبیعی است.

ب) $B=\{-۲\ ,\ -۱\ ,\ ۰\ ,\ ۱\ ,\ ۲,...\}$

جواب مجموعه‌ی B، مجموعه‌ی عددهای صحیح بزرگ‌تر از ۳- است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$B=\left\{\ x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ x>-۳\right\}$$

این مجموعه را می‌خوانیم: B برابر است با مجموعه‌ی عددهایی به شکل x که متعلق به مجموعه‌ی عددهای صحیح هستند به‌طوری که x بزرگ‌تر از ۳- است.

تذکر **مجموعه‌ی B را به‌صورت زیر نیز می‌توانیم نمایش دهیم:**

$$B=\left\{\ \mathbf{x}\in\mathbb{Z}\ \middle|\ x\geq -۲\right\}$$

در این مجموعه، عبارت $x\geq -۲$ یعنی همه‌ی عددهای بزرگ‌تر یا مساوی ۲-.

ج) $C=\{...\ ,\ -۶\ ,\ -۳\ ,\ ۰\ ,\ ۱\ ,\ ۳\ ,\ ۶\ ,\ ...\}$

جواب مجموعه‌ی C، مجموعه‌ی مضرب‌های صحیح عدد ۳ است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$C=\left\{\ ۳k\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

این مجموعه را می‌خوانیم: C برابر است با مجموعه‌ی عددهایی به شکل $۳k$ به‌طوری که k متعلق به مجموعه‌ی عددهای صحیح است.

د) $D=\{۱۰\ ,\ ۱۱\ ,\ ۱۲\ ,۱۳\ ,\ ۱۴\}$

جواب مجموعه‌ی D، مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۵ است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$D=\left\{\ x\in\mathbb{N}\ \middle|\ ۹<x<۱۵\right\}$$

تذکر **مجموعه‌ی D را به‌صورت زیر نیز می‌توانیم نمایش دهیم:**

$$\mathbf{D}=\left\{\ \mathbf{x}\in\mathbb{N}\ \middle|\ ۱۰\leq \mathbf{x}\leq ۱۴\right\}$$

در این مجموعه، عبارت $۱۰\leq x\leq ۱۴$ یعنی همه‌ی عددهای بین ۱۰ و ۱۴ که خود ۱۰ و ۱۴ نیز جزو عضوهای مجموعه می‌باشند.

مثال ۱۰: مجموعه‌های داده شده را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

الف) $A=\{۰\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳\ ,\ ۴\ ,\ ۵\}$

جواب

$A=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid -۱<x<۶\right\}$ یا $A=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid ۰\le x\le ۵\right\}$ یا $A=\left\{x\in\mathbb{W} \mid x\le ۵\right\}$

ب) $B=\{\dots, -۹, -۸, -۷\}$

جواب

$B=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid x<-۶\right\}$ یا $B=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid x\le -۷\right\}$

ج) $C=\{-۹۹, -۹۸, -۹۷, \dots\}$

جواب

$C=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid x>-۱۰۰\right\}$ یا $C=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid x\ge -۹۹\right\}$

د) $D=\{۲, ۳, ۴, \dots, ۲۵\}$

جواب

$D=\left\{x\in\mathbb{N} \mid ۱<x<۲۶\right\}$ یا $D=\left\{x\in\mathbb{N} \mid ۲\le x\le ۲۵\right\}$

مثال ۱۱: مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

الف) $E=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid -۳<x<۴\right\}$

جواب

$E=\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$

ب) $F=\left\{x\in\mathbb{N} \mid x<۵\right\}$

جواب

$F=\{۱, ۲, ۳, ۴\}$

ج) $G=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid x\ge -۱۲\right\}$

جواب

$G=\{-۱۲, -۱۱, -۱۰, \dots\}$

د) $H=\left\{۴k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

جواب

$H=\{\dots, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, \dots\}$

ه) $I=\left\{x\in\mathbb{N} \mid -۲<x<۱\frac{۱}{۳}\right\}$

جواب

$I=\{۱\}$

و) $J=\left\{x\in\mathbb{W} \mid -۴\le x\le ۲\right\}$

جواب

$J = \{ ۰ , ۱ , ۲ \}$

مثال ۱۲: مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان نمایش دهید.

الف) $A = \left\{ ۲k - ۵ \mid k \in \mathbb{N} \right\}$

جواب برای نمایش مجموعه‌ی A با عضوهایش، از جدولی مانند جدول زیر استفاده می‌کنیم و در هر مرحله، به‌جای k، یک عدد طبیعی در $۲k - ۵$ قرار می‌دهیم.

k	۱	۲	۳	۴	...
$۲k - ۵$	$\underbrace{۲(۱) - ۵}_{-۳}$	$\underbrace{۲(۲) - ۵}_{-۱}$	$\underbrace{۲(۳) - ۵}_{۱}$	$\underbrace{۲(۴) - ۵}_{۳}$	...

با توجه به جدول، نمایش مجموعه‌ی A با عضوهایش به‌صورت زیر است:

$A = \{ -۳ , -۱ , ۱ , ۳ , ... \}$

ب) $B = \left\{ k^۲ + ۱ \mid k \in \mathbb{Z} , -۳ \leq k \leq ۳ \right\}$

جواب مانند قسمت (الف) عمل می‌کنیم.

k	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$k^۲ + ۱$	$\underbrace{(-۳)^۲ + ۱}_{۱}$	$\underbrace{(-۲)^۲ + ۱}_{۵}$	$\underbrace{(-۱)^۲ + ۱}_{۲}$	$\underbrace{۰^۲ + ۱}_{۱}$	$\underbrace{۱^۲ + ۱}_{۲}$	$\underbrace{۲^۲ + ۱}_{۵}$	$\underbrace{۳^۲ + ۱}_{۱۰}$

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌کنیم، به‌ازای عددهای قرینه‌ی یکدیگر (مثلاً ۲- و ۲) مقدار $k^۲ + ۱$ برابر با یک عدد خواهد بود (چون حاصل هر عدد مثبت و هر عدد منفی به توان ۲، عددی مثبت است.) . بنابراین نمایش مجموعه‌ی B با عضوهایش به‌صورت زیر است:

$B = \{ ۱ , ۲ , ۵ , ۱۰ \}$

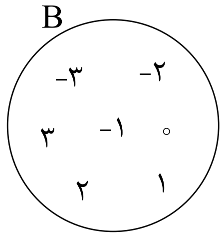
مثال ۱۳: مجموعه‌ی عددهای صحیح بین ۴- و ۴+ را به سه روش نمایش دهید و آن را B بنامید.

جواب

روش اول: با نوشتن عضوها

$B = \{ -۳ , -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳ \}$

روش دوم: با نمودار وِن



روش سوم: با نمادهای ریاضی

$$B=\left\{ x\in \mathbb{Z} \mid -۴<x<۴ \right\}$$

مجموعه‌ی تهی:

تعریف **مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه‌ی تُهی نامیده می‌شود و آن را با نماد $\varnothing$ یا { } نمایش می‌دهیم.**

تذکر **باید دقت داشته باشیم که این مجموعه با مجموعه‌ی $\{\varnothing\}$ یا { ۰ } که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.**

مثال **۱۴:** کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ی تهی را نشان می‌دهد؟

الف) مجموعه‌ی عددهای صحیح بین ۵- و ۴

جواب می‌دانیم عددهای صحیح بین ۵- و ۴ عبارتند از: ۳, ۲, ۱, ۰, ۱- , ۲- , ۳- , ۴- . لذا مجموعه‌ی عددهای صحیح بین ۵- و ۴ دارای عضو است. بنابراین مجموعه‌ی تهی نیست.

ب) مجموعه‌ی عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱

جواب می‌دانیم عددهای طبیعی از ۱ شروع می‌شوند. لذا هیچ عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱ وجود ندارد. پس مجموعه‌ی عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱، هیچ عضوی ندارد. بنابراین مجموعه‌ی تهی است.

ج) عددهای اول بین ۲۴ و ۲۷

جواب بین ۲۴ و ۲۷ هیچ عدد اولی وجود ندارد. لذا مجموعه‌ی عددهای اول بین ۲۴ و ۲۷، هیچ عضوی ندارد. بنابراین مجموعه‌ی تهی است.

د) مجموعه‌ی سیاره‌هایی که در منظومه‌ی شمسی وجود دارند.

جواب می‌دانیم در منظومه‌ی شمسی، سیاره‌هایی وجود دارد. لذا مجموعه‌ی سیاره‌هایی که در منظومه‌ی شمسی وجود دارند، دارای عضو است. بنابراین مجموعه‌ی تهی نیست.

مجموعه‌های مساوی:

تعریف دو مجموعه‌ی A و B را مساوی گویند هرگاه هر عضو مجموعه‌ی A، عضوی از مجموعه‌ی B و هر عضو مجموعه‌ی B، عضوی از مجموعه‌ی A باشد. در این صورت می‌نویسیم: $A = B$.

تذکر اگر عضوی در مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ باشد که در مجموعه‌ی $\mathbf{B}$ نباشد یا عضوی در مجموعه‌ی $\mathbf{B}$ باشد که در مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ نباشد، در این صورت مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ با مجموعه‌ی $\mathbf{B}$ برابر نیست و می‌نویسیم: $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

مثال ۱۵: مجموعه‌ی A شامل پنج عدد طبیعی متوالی است به‌طوری که حاصل جمع آن‌ها برابر ۶۰ است. ابتدا مجموعه‌ی A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده‌اند و با A برابر هستند.

الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۸ و ۱۴

ب) مجموعه‌ی پنج عدد طبیعی متوالی که میانگین آن‌ها برابر با ۱۲ است.

ج) مجموعه‌ی عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۹ و کوچک‌تر از ۱۵

جواب ابتدا مجموعه‌ی A را مشخص می‌کنیم:

عدد وسط $۶۰ \div ۵ = ۱۲$

پنج عدد متوالی موردنظر عبارتند از:

$$۱۰ , ۱۱ , \underset{\text{عدد وسط}}{\underset{\downarrow}{۱۲}} , ۱۳ , ۱۴$$

بنابراین مجموعه‌ی A برابر است با:

$$A = \{ ۱۰ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۴ \}$$

اکنون مجموعه‌های مربوط به قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) را می‌نویسیم.

الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۸ و ۱۴ به‌صورت زیر است:

$$\{ ۹ , ۱۰ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۳ \}$$

ب) مجموعه‌ی پنج عدد طبیعی متوالی که میانگین آن‌ها برابر با ۱۲ می‌باشد، به‌صورت زیر است:

$$\{ ۱۰ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۴ \}$$

ج) مجموعه‌ی عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۹ و کوچک‌تر از ۱۵ به‌صورت زیر است:

$$\{ ۱۰ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۴ \}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مجموعه‌ی A با مجموعه‌ی مربوط به قسمت‌های (ب) و (ج) برابر است.

مثال ۱۶: در مجموعه‌های A و B، مقدار x و y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $A=B$.

$$A=\left\{۱/۲, x, \frac{۳}{۸}, -۵, \frac{\sqrt{۳۶}}{۷}\right\}$$

$$B=\left\{۰/۳۷۵, -\sqrt{۲۵}, y, ۱\frac{۱}{۵}, -۳/۴\right\}$$

جواب: در این دو مجموعه داریم:

$$۱/۲=۱\frac{۱}{۵} \quad , \quad \frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵ \quad , \quad -\sqrt{۲۵}=-۵$$

برای این‌که دو مجموعه‌ی A و B با هم برابر باشند، باید داشته باشیم:

$$x=-۳/۴ \qquad , \qquad y=\frac{\sqrt{۳۶}}{۷}=\frac{۶}{۷}$$

مثال ۱۷: مقدار a و b را چنان بیابید که دو مجموعه‌ی $E=\{-۲, ۵a-۱\}$ و $F=\{-۲۱, ۸-۲b\}$ با هم مساوی باشند.

جواب: برای این‌که دو مجموعه‌ی E و F با هم مساوی باشند، باید داشته باشیم: $۵a-۱=-۲۱$, $۸-۲b=-۲$.

اکنون با استفاده از روش حل معادله می‌توانیم مقدار a و b را به‌دست آوریم.

$$۵a-۱=-۲۱ \Rightarrow ۵a=-۲۱+۱ \Rightarrow ۵a=-۲۰ \Rightarrow a=\frac{-۲۰}{۵}=-۴$$

$$۸-۲b=-۲ \Rightarrow -۲b=-۲-۸ \Rightarrow -۲b=-۱۰ \Rightarrow b=\frac{-۱۰}{-۲}=۵$$

زیرمجموعه:

تعریف **اگر هر عضو مجموعه‌ی A، عضوی از مجموعه‌ی B باشد، می‌گوییم مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B است و می‌نویسیم: $A\subseteq B$.**

تذکر **اگر حداقل یک عضو در مجموعه‌ی A باشد که در مجموعه‌ی B نباشد، می‌گوییم مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B نیست و می‌نویسیم: $A\not\subseteq B$.**

نکته ۱۱: هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خودش است؛ یعنی اگر A مجموعه‌ی دلخواهی باشد، در این صورت داریم:

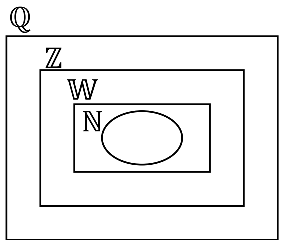
$$A\subseteq A$$

نکته ۱۲: مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی دلخواهی مانند A است. به‌عبارت دیگر:

$\varnothing \not\subseteq \mathbf{A}$

نکته ۱۳: از نمادهای $\subseteq$ یا $\not\subseteq$ زمانی استفاده می‌شود که در سمت راست و چپ این نمادها، مجموعه قرار داشته باشد. (به‌عبارت دیگر یکی از حروف بزرگ انگلیسی و یا علامت آکولاد که نشان‌دهنده‌ی مجموعه است، باشد.)

نکته ۱۴: ازآنجاکه هر عدد طبیعی، حسابی و صحیح عددی گویا است، لذا داریم:



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

مثال ۱۸: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $۵ \in \mathbb{N}$

جواب درست است. زیرا عدد ۵ در مجموعه‌ی عددهای طبیعی (یعنی $\mathbb{N}$) قرار دارد.

ب) $-۲ \in \mathbb{W}$

جواب نادرست است. زیرا مجموعه‌ی عددهای حسابی (یعنی $\mathbb{W}$)، عددهای منفی را شامل نمی‌شود.

ج) $\{۱۳\} \in \{ ۱ , ۲ , ۳ , ... , ۲۰ \}$

جواب نادرست است. زیرا طبق نکته ۱۳، باید از نماد $\subseteq$ استفاده شود.

د) $۳ \subseteq \{ ۳ ,۷ ,۱۲ \}$

جواب نادرست است. زیرا طبق نکته ۷، باید از نماد $\in$ استفاده شود.

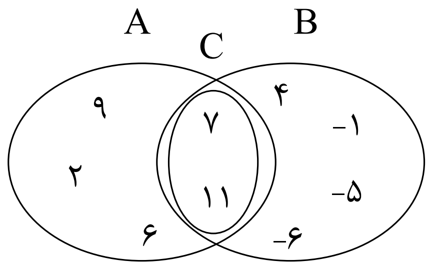
ه) $\frac{۲}{۵} \notin \mathbb{Z}$

جواب درست است. زیرا همان‌طور که می‌دانیم، مجموعه‌ی عددهای صحیح (یعنی $\mathbb{Z}$)، عددهای کسری را شامل نمی‌شود.

و) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$

جواب درست است. زیرا همان‌طور که می‌دانیم، مجموعه‌ی عددهای صحیح (یعنی $\mathbb{Z}$)، عددهای مثبت، منفی و عدد صفر را شامل می‌شود؛ ولی مجموعه‌ی عددهای طبیعی، عددهای ۱ به بالا را شامل می‌شود.

مثال ۱۹: با توجه به شکل زیر:



الف) مجموعه‌های A، B و C را با عضوهایشان مشخص کنید.

جواب

$A = \{۲,۶,۷,۹,۱۱\}$

$B = \{-۶,-۵,-۱,۴,۷,۱۱\}$

$C = \{۷,۱۱\}$

ب) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

$-۵ \in \square$ $۱۱ \;\square\; A$ $۷ \;\square\; B$ $۶ \in \square$

$\square \subseteq A$ $\square \subseteq B$ $-۱۱ \notin \square$ $۴ \;\square\; A$

جواب

$-۵ \in \boxed{B}$ $۱۱ \boxed{\in} A$ $۷ \boxed{\in} B$ $۶ \in \boxed{A}$

$\boxed{C} \subseteq A$ $\boxed{C} \subseteq B$ $-۱۱ \notin \boxed{C}$ $۴ \boxed{\notin} A$

مثال ۲۰: مجموعه‌ی $M = \{۴, ۷, ۸, ۹, ۱۲, ۱۳, ۱۶\}$ را درنظر بگیرید:

الف) زیرمجموعه‌ای از M بنویسید که عضوهای آن مجذور کامل باشند و آن را A بنامید.

جواب

$A = \{۴, ۹, ۱۶\}$

ب) زیرمجموعه‌ای از M بنویسید که عضوهای آن فرد باشند و آن را B بنامید.

جواب

B = { ۷ , ۹ , ۱۳ }

ج) زیرمجموعه‌ای از B بنویسید که عضوهای آن عدد اول باشند و آن را C بنامید.

جواب

C = { ۷ , ۱۳ }

د) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱) $B \subseteq C$ ۲) $C \subseteq A$ ۳) $۱۲ \not\in A$

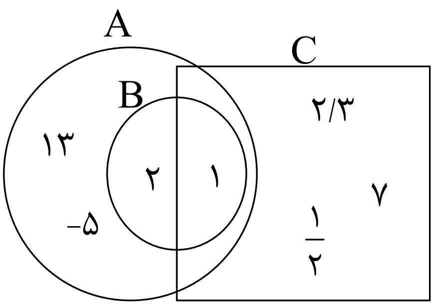
۴) $\{۹,۱۶\} \subseteq A$ ۵) $\{۷\} \in B$ ۶) $C \subseteq B$

جواب

۱) نادرست ۲) نادرست ۳) درست

۴) درست ۵) نادرست ۶) درست

مثال ۲۱: با توجه به شکل زیر، به سؤالات پاسخ دهید.



الف) مجموعه‌های A، B و C را با عضوهایشان نمایش دهید.

جواب

A = { -۵ ,۱ ,۲ ,۱۳ }

B = { ۱ ,۲ }

$C = \left\{ \frac{۱}{۲} , ۱ , ۲/۳ , ۷ \right\}$

ب) زیرمجموعه‌ای از A بنویسید که عضوهای آن عدد اول باشند.

جواب

{ ۲ , ۱۳ }

ج) زیرمجموعه‌ای از C بنویسید که عضوهای آن عدد صحیح نباشند.

جواب

$\left\{ \frac{۱}{۲} , ۲/۳ \right\}$

د) در داخل $\square$ یکی از نمادهای $(\in , \notin , \subseteq , \not\subseteq)$ را بگذارید.

$A \square B$ $\quad$ $B \square ۲$ $\quad$ $A \square \left\{\frac{۱}{۲}\right\}$ $\quad$ $A \square ۱۲$

جواب

$A \boxed{\subseteq} B$ $\quad$ $B \boxed{\in} ۲$ $\quad$ $A \boxed{\not\subseteq} \left\{\frac{۱}{۲}\right\}$ $\quad$ $A \boxed{\notin} ۱۲$

روش نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

برای نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه، می‌توانیم با شروع از خود مجموعه و حذف تک‌تک عضوهای آن، در همه‌ی حالت‌هایی که امکان‌پذیر است، تمام زیرمجموعه‌های آن مجموعه را بنویسیم.

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲۲: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{ ۲ , ۵ , b \}$ را بنویسید.

جواب

زیرمجموعه‌ی سه عضوی : $\{ ۲ , ۵ , b \}$

زیرمجموعه‌ی دو عضوی : $\{ ۲ , ۵ \} , \{ ۲ , b \} , \{ ۵ , b \}$

زیرمجموعه‌ی یک عضوی : $\{ ۲ \} , \{ ۵ \} , \{ b \}$

زیرمجموعه‌ی هیچ عضوی : $\{ \}$

مثال ۲۳: تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $A = \left\{ x^۳ \mid x = ۲,۵ \right\}$

جواب ابتدا مجموعه‌ی A را با عضوهایش مشخص می‌کنیم:

$$A = \left\{ ۲^۳ , ۵^۳ \right\} = \{۸,۱۲۵\}$$

اکنون زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A را می‌نویسیم:

زیرمجموعه‌ی دو عضوی : $\{ ۸ , ۱۲۵ \}$

زیرمجموعه‌ی یک عضوی : $\{ ۸ \} , \{ ۱۲۵ \}$

زیرمجموعه‌ی هیچ عضوی : $\{ \}$

ب) $B = \{ x \mid x \in \mathbb{N}, ۴x - ۱ = ۷ \}$

جواب برای مشخص کردن مجموعه‌ی A با عضوهایش، ابتدا معادله‌ی $۴x - ۱ = ۷$ را حل می‌کنیم.

$$۴x - ۱ = ۷ \Rightarrow ۴x = ۷ + ۱ \Rightarrow ۴x = ۸ \Rightarrow x = ۲$$

جواب به‌دست آمده (یعنی عدد ۲) یک عدد طبیعی است؛ پس متعلق به مجموعه‌ی B است. بنابراین نمایش مجموعه‌ی B

با عضوهایش به‌صورت زیر است:

$B = \{ ۲ \}$

اکنون زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی B را می‌نویسیم:

$\{ ۲ \}$: زیرمجموعه‌ی یک عضوی

$\{ \}$: زیرمجموعه‌ی هیچ عضوی

نکته ۱۵: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی، از رابطه‌ی $\mathbf{۲^n}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲۴: یک مجموعه‌ی ۷ عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

جواب با توجه به نکته ۱۵، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۷ عضوی برابر است با:

$۲^۷ = ۱۲۸$

مثال ۲۵: مجموعه‌ی $F = \{-۲ , ۷ , ۱۰ , ۱۸\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ آن‌ها را بنویسید.

جواب مجموعه‌ی F، چهار عضو دارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با: $۲^۴ = ۱۶$. اکنون زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی F را می‌نویسیم:

$\{-۲ , ۷ , ۱۰ , ۱۸\}$: زیرمجموعه‌ی چهار عضوی

$\{-۲ , ۷ , ۱۰\},\{-۲ , ۷ , ۱۸\},\{-۲ , ۱۰ , ۱۸\},\{۷ , ۱۰ , ۱۸\}$: زیرمجموعه‌ی سه عضوی

$\{-۲ , ۷\},\{-۲ , ۱۰\},\{-۲ , ۱۸\},\{۷ , ۱۰\},\{۷ , ۱۸\},\{۱۰ , ۱۸\}$: زیرمجموعه‌ی دو عضوی

$\{-۲\},\{۷\},\{۱۰\},\{۱۸\}$: زیرمجموعه‌ی یک عضوی

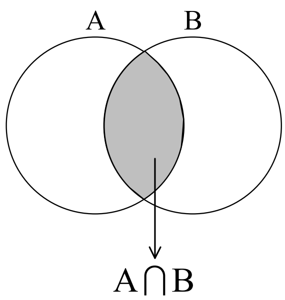
$\{ \}$: زیرمجموعه‌ی هیچ عضوی

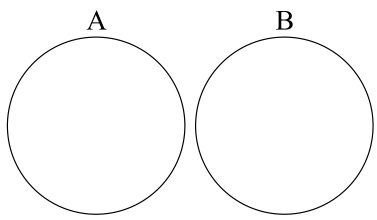
اعمال روی مجموعه‌ها:

الف) اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی که هم متعلق به مجموعه‌ی A و هم متعلق به مجموعه‌ی B است. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}}$$

نمودار وِن اشتراک دو مجموعه‌ی A و B در دو حالت ممکن به‌صورت زیر است:



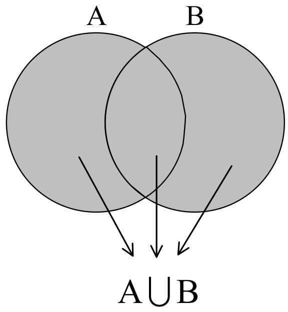


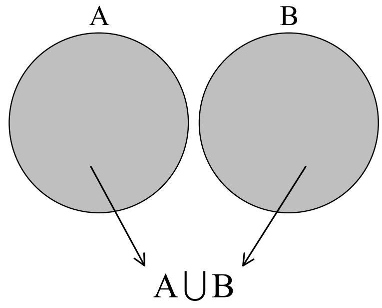
$A \cap B = \varnothing$

ب) اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی که حداقل متعلق به یکی از دو مجموعه‌ی A و B باشد. این مجموعه را با نماد $A\bigcup B$ و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A} \text{ یا } \mathbf{x\in B\}}$$

نمودار وِن اجتماع دو مجموعه‌ی A و B در دو حالت ممکن به‌صورت زیر است:

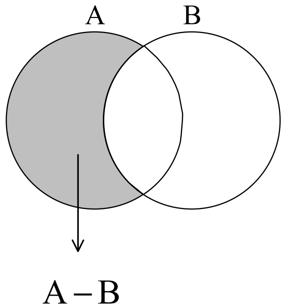


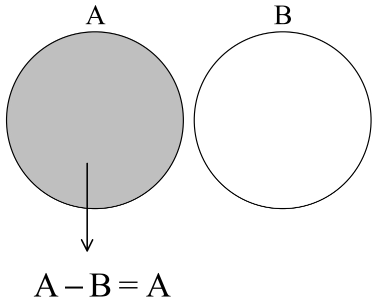


ج) تفاضل دو مجموعه: مجموعه‌ی $A-B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی که متعلق به مجموعه‌ی A هستند ولی متعلق به مجموعه‌ی B نیستند. این مجموعه را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{A-B=\{x\,|\,x\in A, x\notin B\}}$$

نمودار وِن $A-B$ در دو حالت ممکن به‌صورت زیر است:



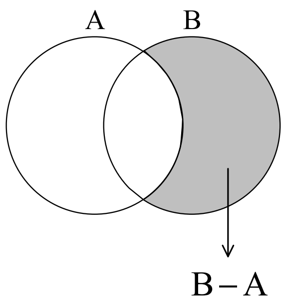


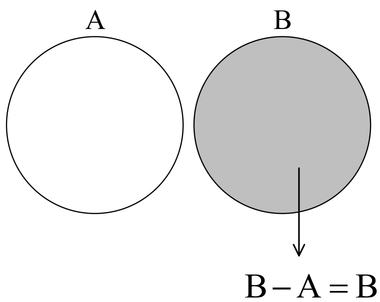
همچنین:

مجموعه‌ی $B-A$ (B منهای A) مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی که متعلق به مجموعه‌ی B هستند ولی متعلق به مجموعه‌ی A نیستند. این مجموعه را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{B-A=\{x\,|\,x\in B, x\notin A\}}$$

نمودار وِن $B-A$ در دو حالت ممکن به‌صورت زیر است:





نکته ۱۶: برای هر دو مجموعه‌ی A و B داریم:

$\mathbf{A-B\neq B-A}$; $\mathbf{A\neq B}$

مثال ۲۶: اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$، $B=\{۳,۴,۸,۹,۱۲,۱۳\}$ و $C=\{۳,۸,۹,۱۲,۱۵\}$، هریک از مجموعه‌های خواسته شده را با عضوهایشان مشخص کنید.

الف) $A\cup C$

جواب

$A\cup C=\{۱,۲,۳,...,۱۰,۱۲,۱۵\}$

ب) $B\cap C$

جواب

$B\cap C=\{۳,۸,۹,۱۲\}$

ج) $A\cap B\cap C$

جواب

$A\cap B\cap C=\{۳,۸,۹\}$

د) $(A\cup B)-C$

جواب

$A\cup B=\{۱,۲,۳,...,۱۰,۱۲,۱۳\}$

$(A\cup B)-C=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۱۰,۱۳\}$

ه) $(A-B)\cup(B-C)$

جواب

$A-B=\{۱,۲,۵,۶,۷,۱۰\}$

$B-C=\{۴,۱۲,۱۳\}$

$(A-B)\cup(B-C)=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۱۰,۱۲,۱۳\}$

و) $B\cup B$

جواب

$B\cup B=\{۳,۴,۸,۹,۱۲,۱۳\}=B$

ز) $A\cap A$

جواب

$A\cap A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}=A$

ح) $C\cup\varnothing$

جواب

$C\cup\varnothing=\{۳,۸,۹,۱۲,۱۵\}=C$

ط) $B\cap\varnothing$

جواب

$B\cap\varnothing=\varnothing$

مثال ۲۷: دو مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x<۴\}$, $B=\{x\in\mathbb{N} \mid x<۴\}$ را درنظر بگیرید. مجموعه‌های $A\cap B$، $A\cup B$ و $(A\cup B)-(A\cap B)$ را به‌دست آورید.

جواب ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص می‌کنیم:

$$A=\{...,-۲,-۱,۰,۲,۳\}$$
$$B=\{۱,۲,۳\}$$
$$A\cap B=\{۱,۲,۳\}$$
$$A\cup B=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}=A$$
$$(A\cup B)-(A\cap B)=A-(A\cap B)=\{...,-۲,-۱,۰\}$$

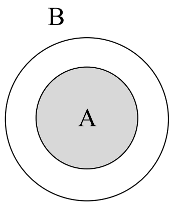
مثال ۲۸: مجموعه‌های $(\mathbb{N}-\mathbb{Z})$، $(\mathbb{Z}-\mathbb{W})$، $(\mathbb{Z}-\mathbb{N})$، $(\mathbb{W}-\mathbb{N})$ را مشخص کنید.

جواب

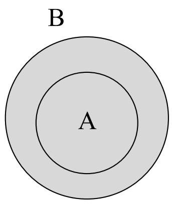
$$\mathbb{N}-\mathbb{Z}=\varnothing$$
$$\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{...,-۳,-۲,-۱\}$$
$$\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{...,-۲,-۱,۰\}$$
$$\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$$

مثال ۲۹: هریک از مجموعه‌های داده شده در سمت چپ را در صورت وجود نمودار نظیر برای آن، به نمودار نظیرش وصل کنید.

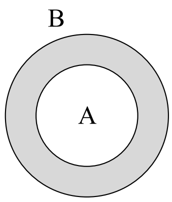
$A\cap B$



$A\cup B$

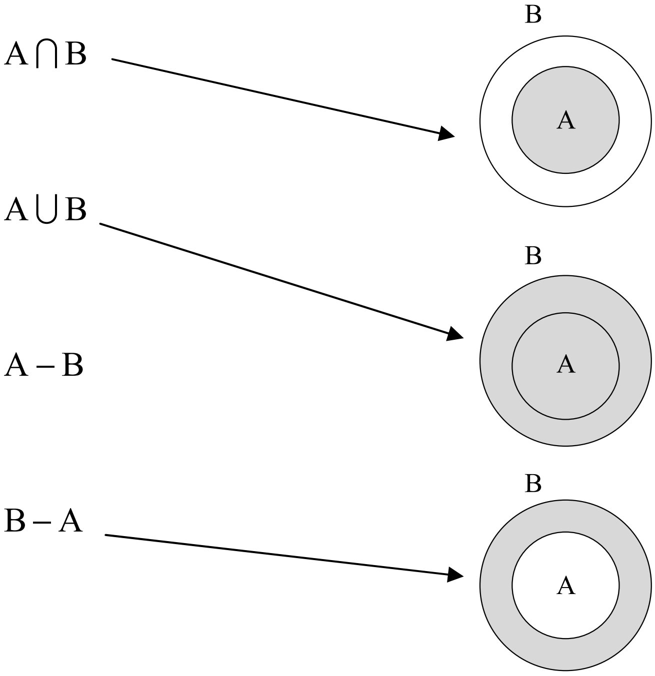


$A-B$

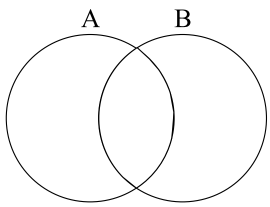


$B-A$

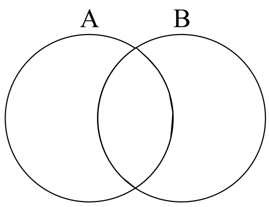
جواب



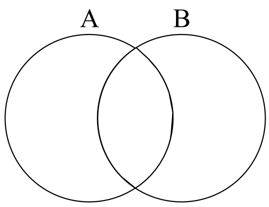
مثال **۳۰:** در هریک از شکل‌های زیر، مجموعه‌ی خواسته شده را هاشور بزنید.



$(A-B)\cup(B-A)$

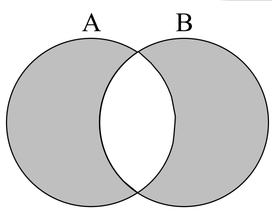


$A-(A\cap B)$

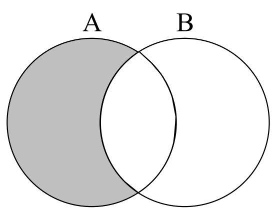


$(A-B)\cup B$

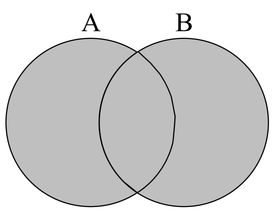
جواب



$(A-B)\cup(B-A)$

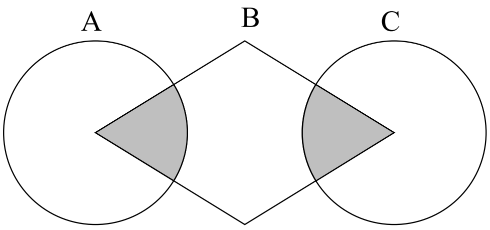


$A-(A\cap B)$



$(A-B)\cup B$

مثال ۳۱: کدام‌یک از گزینه‌های زیر، قسمت هاشور خورده را نشان می‌دهد؟



۱) $A\cap B\cap C$　　　۲) $(A\cup C)-B$

۳) $(A\cap B)\cup(C\cap B)$　　　۴) $A\cap(A\cup C)$

جواب گزینه (۳) صحیح است.

نکته ۱۷: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم؛ به‌عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، در این صورت می‌نویسیم: $n(A)=k$.

مثال ۳۲: اگر $A=\{۲,۵,۶,۸\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، مقدار $n(A)$، $n(B)$، $n(A\cap B)$، $n(A-B)$ و $n(B-A)$ را به‌دست آورید.

جواب

$n(A)=۴$　　,　　$n(B)=۵$

$(A\cap B)=\{۲,۵\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲$

$(A\cup B)=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸\}\Rightarrow n(A\cup B)=۷$

$(A-B)=\{۶,۸\}\Rightarrow n(A-B)=۲$

$(B-A)=\{۱,۳,۴\}\Rightarrow n(B-A)=۳$

نکات مهم در مجموعه‌ها:

نکته ۱۸: در اشتراک دو مجموعه همواره داریم:

۱) $\mathbf{A\cap B=B\cap A}$

۲) $\mathbf{A\cap A=A}$

۳) $\mathbf{A\cap\varnothing=\varnothing}$

نکته ۱۹: در اجتماع دو مجموعه همواره داریم:

۱) $\mathbf{A\cup B=B\cup A}$

۲) $\mathbf{A\cup A=A}$

۳) $\mathbf{A\cup\varnothing=A}$

نکته ۲۰: در تفاضل دو مجموعه همواره داریم:

۱) $\left(A-B\right)\subseteq A$

۲) $\left(B-A\right)\subseteq B$

نکته ۲۱: همواره داریم:

۱) $\left(A\cap B\right)\subseteq A$

۲) $\left(A\cap B\right)\subseteq B$

۳) $\left(A\cap B\right)\subseteq\left(A\cup B\right)$

۴) $A\subseteq\left(A\cup B\right)$

۵) $B\subseteq\left(A\cup B\right)$

مجموعه‌ها و احتمال:

در سال گذشته آموختیم که برای محاسبه‌ی احتمال یک پیشامد، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌های ممکن}}$$

اکنون که با مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها آشنا شده‌ایم، راحت‌تر می‌توانیم این فرمول را بنویسیم و به‌کار ببریم.

اگر مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن را S، مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش دهیم، دستور بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۳۳: تاسی را می‌اندازیم. مطلوب است احتمال این‌که:

الف) عدد ظاهر شده زوج باشد.

جواب پیشامد مطلوب، یعنی ظاهر شدن عدد زوج را A می‌نامیم. در این صورت داریم:

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(S)=۶$

$A=\{۲,۴,۶\}\Rightarrow n(A)=۳$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ب) عدد ظاهر شده اول باشد.

جواب پیشامد مطلوب، یعنی ظاهر شدن عدد اول را B می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(S)=۶$$

$$B=\{۲,۳,۵\}\Rightarrow n(B)=۳$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

ج) عدد ظاهر شده بزرگ‌تر از ۶ باشد.

جواب پیشامد مطلوب، یعنی ظاهر شدن عدد بزرگ‌تر از ۶ را C می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(S)=۶$$

$$C=\varnothing\Rightarrow n(\varnothing)=۰$$

$$P(C)=P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{۰}{۶}=۰$$

د) عدد ظاهر شده کوچک‌تر از ۷ باشد.

جواب پیشامد مطلوب، یعنی ظاهر شدن عدد کوچک‌تر از ۷ را D می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(S)=۶$$

$$D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(D)=۶$$

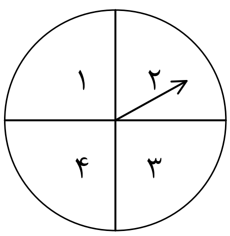
$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۶}=۱$$

پیشامد تصادفی و پیشامدهای هم‌شانس:

تعریف **اگر S مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن باشد، هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامند.**

تعریف **اگر احتمال دو پیشامد با هم برابر باشد، آن‌ها را پیشامدهای هم‌شانس می‌نامند.**

مثال **۳۴:** چرخنده‌ی زیر را درنظر بگیرید:



الف) همه‌ی حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نشان دهد، بنویسید و مجموعه‌ی حاصل را S بنامید.

جواب $S=\{۱,۲,۳,۴\}$

ب) برای هریک از مجموعه‌های زیر، با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید.

$A=\{۱\ ,۳\ \}$ ....

$B=\{۲\ ,۴\ \}$ ....

$C=\{۳\ ,۴\ \}$ ....

$D=\{\ ۴\ \}$ ....

جواب

$A=\{۱\ ,۳\ \}$ (عقربه روی ناحیه‌ی ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

$B=\{۲\ ,۴\ \}$ (عقربه روی ناحیه‌ی ۲ یا ۴ بایستد) یا (عقربه روی عدد زوج بایستد)

$C=\{۳\ ,۴\ \}$ (عقربه روی ناحیه‌ی ۳ یا ۴ بایستد)

$D=\{\ ۴\ \}$ (عقربه روی ناحیه‌ی ۴ بایستد)

ج) احتمال رخ دادن هریک از پیشامدهای بالا را به‌دست آورید.

جواب

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

د) چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس هستند؟

جواب ۳ تا از پیشامدها هم‌شانس هستند که پیشامدهای A، B و C می‌باشند و احتمال رخ دادن هریک از آن‌ها برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

ه) همه‌ی زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

جواب

$\varnothing,\{۴\},\{۳\},\{۲\},\{۱\},\{۳,۴\},\{۲,۴\},\{۲,۳\},\{۱,۴\},\{۱,۳\},\{۱,۲\},\{۲,۳,۴\},\{۱,۳,۴\},\{۱,۲,۴\},\{۱,۲,۳\},\{۱,۲,۳,۴\}$

مثال **۳۵:** در جعبه‌ای ۵ مهره‌ی زرد، ۶ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی بنفش است. اگر یک مهره را به تصادف از این جعبه خارج کنیم، چه‌قدر احتمال دارد:

الف) این مهره قرمز باشد.

جواب پیشامد این‌که مهره قرمز باشد را A می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$n(S)=۵+۶+۴=۱۵$$

$$n(A)=۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

ب) این مهره زرد یا قرمز باشد.

جواب پیشامد این‌که مهره زرد یا قرمز باشد را B می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$n(S)=۱۵$$

$$n(B)=۵+۶=۱۱$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۱۵}$$

ج) این مهره بنفش نباشد.

جواب از سال گذشته می‌دانیم:

احتمال رخ دادن -۱ = احتمال رخ ندادن

پس داریم:

احتمال بنفش بودن مهره -۱ = احتمال بنفش نبودن مهره

پیشامد این‌که مهره بنفش باشد را C می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$n(S)=۱۵$$

$$n(C)=۴$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۵}$$

$$P\,(\text{بنفش نبودن مهره})=۱-P(C)=۱-\frac{۴}{۱۵}=\frac{۱۱}{۱۵}$$

مثال ۳۶: روی ۲۰ کارت، هریک از عددهای طبیعی ۱ تا ۲۰ نوشته شده است و آن‌ها را داخل جعبه‌ای قرار داده‌ایم. به‌طور تصادفی یک کارت از این جعبه بیرون می‌آوریم.

الف) مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید و آن را S بنامید.

جواب

$$S=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$$

ب) هریک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید.

A: پیشامد این‌که عدد روی کارت خارج شده، مضرب ۳ باشد.

B: پیشامد این‌که عدد روی کارت خارج شده، فرد باشد.

C: پیشامد این‌که عدد روی کارت خارج شده، زوج باشد.

D: پیشامد این‌که عدد روی کارت خارج شده، بزرگ‌تر از ۱۰ باشد.

جواب

$$A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸\}$$

$$B=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹\}$$

$$C=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰\}$$

$$D=\{۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}$$

ج) هریک از پیشامدهای بالا را محاسبه کنید.

جواب

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

د) کدام‌یک از پیشامدها هم‌شانس هستند؟ چرا؟

جواب پیشامدهای B، C و D هم‌شانس هستند. زیرا احتمال رخ دادن هریک از آن‌ها با هم برابر است.

مثال ۳۷: الف) تاسی را دو بار می‌اندازیم. مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید. چند حالت ایجاد می‌شود؟

جواب

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),$$
$$(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),$$
$$(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

تعداد کل حالت‌ها $n(S)=۳۶$

ب) مطلوب است احتمال این‌که:

۱) دو عدد ظاهر شده، یکسان باشند.

۲) دو عدد ظاهر شده، زوج باشند.

۳) مجموع دو عدد ظاهر شده، کم‌تر از ۸ باشد.

۴) اختلاف دو عدد ظاهر شده، ۳ باشد.

۵) عدد اول، فرد و عدد دوم، مضرب ۴ باشد.

جواب

۱)
$$A=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$$
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

۲)
$$B=\{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}$$
$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

۳)
$$C=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),$$
$$(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۶,۱)\}$$
$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}$$

۴)
$$D=\{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۶),(۴,۱),(۵,۲),(۶,۳)\}$$
$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

۵)
$$E=\{(۱,۴),(۳,۴),(۵,۴)\}$$
$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

مثال ۳۸: الف) سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید و آن را S بنامید.

جواب رو آمدن را با «ر» و پشت آمدن را با «پ» نشان می‌دهیم. در این صورت داریم:

S= { (ر,ر,ر) , (پ,ر,ر) , (ر,پ,ر) , (ر,ر,پ) , (پ,پ,ر) , (پ,ر,پ) , (ر,پ,پ) , (پ,پ,پ)}

n(S) = ۸

ب) مطلوب است احتمال این‌که:

۱) حداقل ۲ بار رو بیاید.

۲) یک بار رو و ۲ بار پشت بیاید.

۳) اصلاً پشت نیاید.

۴) حداکثر یک‌بار پشت بیاید.

جواب

۱) A = { (ر,ر,ر) , (پ,ر,ر) , (ر,پ,ر) , (ر,ر,پ) }

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

۲) B = { (ر,پ,پ) , (پ,ر,پ) , (پ,پ,ر) }

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

۳) C = { (ر,ر,ر) }

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$$

۴) D = { (ر,ر,ر) , (پ,ر,ر) , (ر,پ,ر) , (ر,ر,پ) }

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳۹: یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم. احتمال این‌که سکه، رو و تاس، عدد اول بیاید را تعیین کنید.

جواب ابتدا مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را می‌نویسیم:

S= { (ر,۱) , (ر,۲) , (ر,۳) , (ر,۴) , (ر,۵) , (ر,۶) , (پ,۱) , (پ,۲) , (پ,۳) , (پ,۴) , (پ,۵) , (پ,۶) }

اکنون مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های مطلوب را می‌نویسیم:

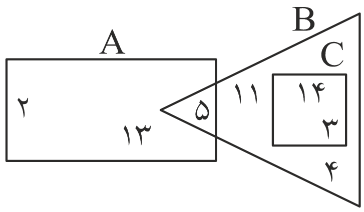
A = { (ر,۲) , (ر,۳) , (ر,۵) }

بنابراین داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

تمرین

۱- با توجه به شکل روبه‌رو:



الف) هریک از مجموعه‌های A، B و C را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

$A = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

$B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

$C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

ب) زیرمجموعه‌ای از B بنویسید که عضوهای آن عدد اول باشند و آن را D بنامید.

ج) درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را مشخص کنید.

$۸ \in B$ $\qquad$ $\{\} \subseteq C$ $\qquad$ $\{۴,۳\} \subseteq B$ $\qquad$ $۲^{۳} \notin A$

۲- مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی بنویسید.

الف) $A = \{\dots, -۹, -۸, -۷\}$ $\qquad$ ب) $B = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$

ج) $C = \{-۱۰۰, -۹۹, \dots, ۹۹, ۱۰۰\}$ $\qquad$ د) $D = \{۱۵, ۱۴, ۱۳, \dots\}$

ه) $E = \{-۲, -۱, \dots, ۵\}$ $\qquad$ و) $F = \{\dots, -۳, -۲, -۱, ۰\}$

۳- اگر داشته باشیم $A = \{x \in \mathbb{N}\ x \leq ۹\}$ ، $B = \{۲, ۴, ۶, ۷, ۸\}$ و $C = \{۱, ۳, ۵, ۶, ۸\}$ ، مجموعه‌ی $(A \cup B) - (A \cap C)$ را با عضوهایش مشخص کنید.

۴- سه سکه را پرتاب می‌کنیم.

الف) مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال این‌که حداقل ۱ بار رو بیاید، چه‌قدر است؟

ج) احتمال این‌که حداکثر ۲ بار پشت بیاید، چه‌قدر است؟

توجه **دانش‌آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های بیش‌تر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.**