

ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه پیشرفته

تألیف: دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان

نظارت عالی: علی خزایی

عنوان و نام پدیدآور : ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه پیشرفته
 وضعیت ویراست : ویراست ۲.
 مشخصات نشر : تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۶.
 مشخصات ظاهری : ۱۷۰ص؛ ۲۲×۲۹ س.م.
 شابک : 978-600-7903-97-1
 وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
 یادداشت : چاپ دوم.
 شناسه افزوده : خزائی، علی، ۱۳۴۸ - ناظر
 شناسه افزوده : کانون ریاضیدانان زمان
 شماره کتابشناسی ملی : ۴۸۴۱۱۰۲

نام کتاب:	ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه پیشرفته
تألیف:	دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان
شابک:	۹۷۸-۶۰۰-۷۹۰۳-۹۷-۱
	ISBN:978-600-7903-97-1
نوبت چاپ:	چاپ دوم - ۱۳۹۷
تیراژ:	۱۰۰۰ جلد

تعداد صفحات: ۱۷۰ صفحه

قیمت: ۲۸۰۰۰ تومان



ناشر: ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز پخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)

فروشگاه دائمی: تهران - میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی - نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳

حق چاپ برای کانون ریاضیدانان زمان محفوظ است.

کپی برداری و تکثیر هر قسمت از کتاب بدون اجازه کتبی از کانون ریاضیدانان زمان پیگرد قانونی دارد.

پیش‌گفتار

گسترده‌گی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف از جمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری، افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه‌ی امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به‌عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

۱) مجموعه کتاب‌های «تابستانه»: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

۲) مجموعه کتاب‌های «مقدماتی»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۳) مجموعه کتاب‌های «پیشرفته»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

۴) مجموعه کتاب‌های «جامع»: این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و سؤالات تشریحی و چهارگزینه‌ای بدون پاسخ در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۵) مجموعه کتاب‌های «تیزهوشان»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول پیشنهاد می‌گردد.

۶) مجموعه کتاب‌های «موضوعی»: این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

۷) مجموعه کتاب‌های «یکی من، یکی تو»: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤالات «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یکدیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به‌ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

۸) مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به‌صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته (برای مقاطع ابتدایی و متوسطه اول) و در دو شکل تشریحی و چهارگزینه‌ای (برای مقطع متوسطه دوم) در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمونی از آن فصل به‌عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش فرهنگ ریاضی

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

حضرت علی (ع):

دانشی که قرین فهم نباشد، نفعی ندارد. خواندنی که توأم با تامل نباشد، سودمند نیست. عبادتی که بی تفکر باشد، خیری ندارد.

خداوند بزرگ را سپاس می‌گوییم که نعمت اندیشیدن را به همگان عطا فرمود تا در پرتو آن، انسان مسیر صحیح زیستن را آموخته و به دیگران نیز بیاموزد.

یکی از راهبردهای مهم یادگیری، آموزش دقیق مفاهیم و انجام تمرین‌های متناسب با اصول یادگیری و تکرار آن است. در این راستا، داشتن منبع مناسب برای یادگیری و درک بیش‌تر و همچنین نمونه سؤالات مناسب و متنوع برای تمرین، می‌تواند یکی از عوامل مهم موفقیت در یادگیری و پیشرفت علمی دانش‌آموزان باشد.

کتابی که در مقابل چشمان جستجوگر شما قرار دارد، بر مبنای نظام آموزشی کانون ریاضیدانان زمان و در جهت تکمیل کتاب‌های زنجیروار آن (تابستانه ← مقدماتی ← پیشرفته) که متناسب با مفاهیم و مطالب کتاب درسی ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه است، همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی به شرح زیر گردآوری شده است:

* تدریس در سطح پیشرفته با روشی کلاسیک و دسته‌بندی و تشریح کامل مطالب

* ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب

* ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی

* تمرین‌های پایان هر فصل

امید است این کتاب، کمک شایانی به موفقیت همه‌ی معلمین گرامی و دانش‌آموزان عزیز بنماید.

دپارتمان متوسطه اول

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

۱	فصل اول: «مجموعه‌ها»
۲	حل مثال‌های مهم عضویت در یک مجموعه و زیرمجموعه
۴	روش به دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه Π عضوی
۵	زیرمجموعه‌های محض (سره) یک مجموعه
۶	مجموعه‌ی توانی یک مجموعه
۷	حل مثال‌های مهم نمایش مجموعه‌ها
۱۰	حل مثال‌های مهم مجموعه‌های مساوی
۱۲	تفاضل متقارن دو مجموعه
۱۴	دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا)
۱۴	تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی
۱۵	مجموعه‌ی مرجع
۱۵	متمم یک مجموعه
۱۶	خواص اجتماع و اشتراک دو مجموعه
۱۸	خواص تفاضل متقارن دو مجموعه
۱۸	قوانینی در مجموعه‌ها
۲۲	بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل
۲۲	حل مثال‌های مهم مجموعه‌ها و احتمال
۲۸	تمرین‌های فصل اول
۲۹	فصل دوم: «عددهای حقیقی»
۳۰	روش‌های یافتن چند عدد گویا بین دو عدد گویا
۳۱	حل مثال‌های مهم عددهای گویا
۳۴	کسرهاى تلسکوپى
۳۵	کسرهاى مسلسل
۳۷	نمایش کسری عددهای اعشاری
۳۷	تبدیل عدد اعشاری تحقیقی مختوم به کسر متعارفی
۳۷	تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به کسر متعارفی

۳۸	تبدیل عدد اعشاری متناوب مرکب به کسر متعارفی
۴۰	خواص جمع و ضرب عددهای حقیقی
۴۲	حل مثال‌های مهم عددهای حقیقی
۴۵	بازه (فاصله)
۴۸	حل مثال‌های مهم قدرمطلق
۵۱	تمرین‌های فصل دوم

فصل سوم: «استدلال و اثبات در هندسه»

۵۳	حل مثال‌های مهم استدلال و اثبات در هندسه
۵۴	نکات مهم تشابه و حل مثال‌های مهم
۶۰	تمرین‌های فصل سوم

فصل چهارم: «توان و ریشه»

۶۳	جمع و تفریق عددهای توان‌دار
۶۴	حل مثال‌های مهم توان
۶۵	روش محاسبه‌ی تعداد صفرهای سمت راست یک عدد توان‌دار و تعداد رقم‌های آن
۶۸	حل معادله‌های توانی
۶۸	فرمول‌های مهم در توان
۶۹	قوانین ریشه‌گیری
۷۱	ضرب عبارتهای رادیکالی
۷۳	تقسیم عبارتهای رادیکالی
۷۷	گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی دوجمله‌ای
۷۹	حل مثال‌های مهم ساده کردن رادیکال‌ها
۸۱	رادیکال‌های مرکب
۸۳	تعریف رادیکال مرکب
۸۳	روش‌های ساده کردن رادیکال‌های مرکب
۸۳	تمرین‌های فصل چهارم

فصل پنجم: «عبارتهای جبری»

۸۷	بخش‌پذیری یک جمله‌ای‌ها
۸۸	بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها

۹۲	مجموع ضرایب چندجمله‌ای‌ها
۹۳	حل مثال‌های مهم عبارت‌های جبری
۹۴	اتحادهای مهم جبری دیگر
۹۴	اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای
۹۴	اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای
۹۴	اتحاد مجموع مکعبات دوجمله‌ای
۹۵	اتحاد تفاضل مکعبات دوجمله‌ای
۹۷	اتحادهای فرعی
۹۸	روش A در تجزیه‌ی برخی از سه‌جمله‌ای‌ها
۱۰۳	ویژگی‌های نابرابری‌ها
۱۰۳	نابرابری‌های قدرمطلق
۱۰۴	حل دستگاه نامعادله‌ها (نامعادله‌های توأم)
۱۰۷	تمرین‌های فصل پنجم
۱۰۹	فصل ششم: «خط و معادله‌های خطی»
۱۱۰	طول یک نقطه روی محور اعداد
۱۱۰	فاصله‌ی بین دو نقطه روی محور اعداد (طول یک پاره‌خط روی محور اعداد)
۱۱۱	فاصله‌ی بین دو نقطه در دستگاه مختصات (طول یک پاره‌خط در دستگاه مختصات)
۱۱۳	مختصات وسط یک پاره‌خط
۱۱۵	رابطه‌ی بین دو متغیر
۱۱۵	متغیر مستقل و متغیر وابسته
۱۱۵	رابطه‌ی خطی
۱۱۵	روش‌های تشخیص یک رابطه‌ی خطی
۱۱۸	شیب
۱۲۲	عرض از مبدأ و طول از مبدأ
۱۲۳	شرط موازی بودن، منطبق بودن و عمود بودن دو خط به فرم استاندارد معادله‌ی خط
۱۲۵	شرط موازی بودن، منطبق بودن و عمود بودن دو خط به فرم دیگر معادله‌ی خط
۱۲۷	روش‌های یافتن معادله‌ی یک خط
۱۲۸	مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط
۱۳۰	روش به‌دست آوردن مساحت مثلثی که یک خط با محورهای مختصات می‌سازد
۱۳۳	فاصله‌ی یک نقطه از یک خط

- ۱۳۳ فاصله‌ی مبدأ مختصات از یک خط
- ۱۳۳ فاصله‌ی دو خط موازی
- ۱۳۴ قرینه‌ی یک خط نسبت به محورها، مبدأ مختصات، نیم‌سازها و یک نقطه
- ۱۳۶ حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به روش قیاسی
- ۱۳۹ حل دستگاه معادله‌های توانی
- ۱۴۰ حل دستگاه سه معادله سه مجهولی
- ۱۴۱ حل برخی مسائل به کمک دستگاه
- ۱۴۳ شرط وجود جواب یک دستگاه
- ۱۴۴ تمرین‌های فصل ششم

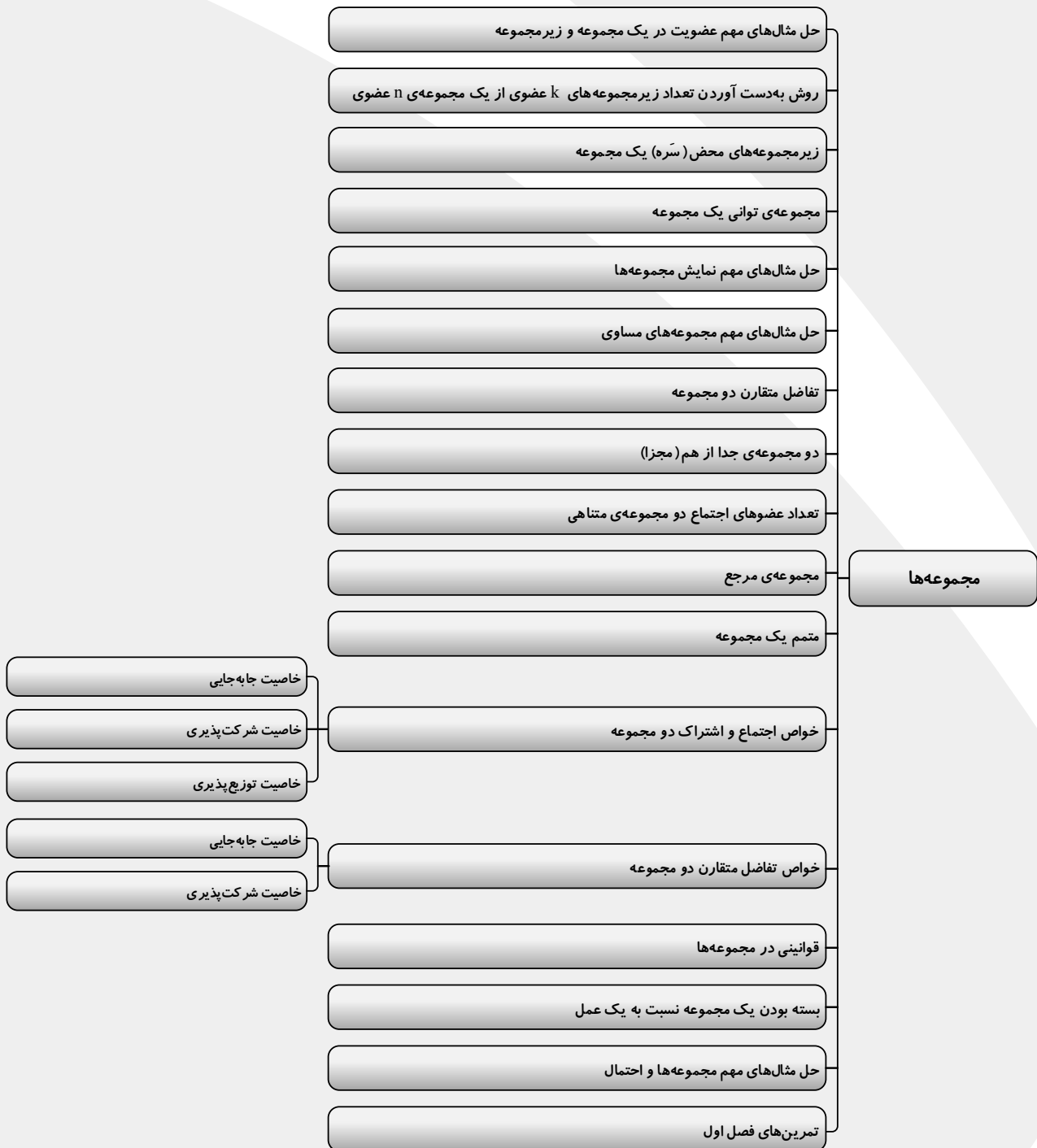
۱۴۵ فصل هفتم: «عبارت‌های گویا»

- ۱۴۶ حل مثال‌های مهم عبارت‌های گویا
- ۱۴۹ تجزیه‌ی یک عبارت گویا به مجموع چند عبارت گویای ساده‌تر
- ۱۴۹ در صورتی که درجه‌ی صورت عبارت گویا از درجه‌ی مخرج آن کم‌تر باشد
- ۱۵۳ در صورتی که درجه‌ی صورت عبارت گویا از درجه‌ی مخرج آن بیش‌تر باشد
- ۱۵۵ تمرین‌های فصل هفتم

۱۵۷ فصل هشتم: «حجم و مساحت»

- ۱۵۸ قطر مکعب مستطیل
- ۱۵۸ یال مکعب مستطیل
- ۱۶۳ هرم منتظم
- ۱۶۳ مساحت جانبی و مساحت کل هرم منتظم
- ۱۶۴ مساحت جانبی و مساحت کل مخروط
- ۱۷۰ تمرین‌های فصل هشتم

سیمای فصل اول



در کتاب مقدماتی، با مطالب مربوط به این فصل آشنا شدیم. اکنون در ادامه‌ی آن مطالب و در سطح پیشرفته‌تر، به حل مثال‌های مهم و بیان مفاهیم جدیدی می‌پردازیم:

حل مثال‌های مهم عضویت در یک مجموعه و زیرمجموعه:



۱: اگر $A = \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}\}$ ، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- الف) $\{\emptyset\} \in A$ ب) $\{\emptyset\} \subseteq A$ ج) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$
 د) $\emptyset \notin A$ ه) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$ و) $\emptyset \notin A$



جواب

- نادرست (ج) درست (ب) درست (الف)
 نادرست (و) درست (ه) درست (د)



۲: مجموعه‌ی $A = \{2, \{3\}, b\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ آن‌ها را بنویسید.



جواب

زآنجا که مجموعه‌ی A سه عضو است، لذا تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با: $2^3 = 8$.

اکنون زیرمجموعه‌های این مجموعه را در زیر می‌نویسیم:

$$\{\emptyset\}, \{\{3\}\}, \{b\}, \{2, \{3\}\}, \{2, b\}, \{\{3\}, b\}, A, \emptyset$$



۳: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $B = \{5, 5, \{5, \emptyset\}\}$ را بنویسید.



جواب

می‌دانیم عضوهای تکراری در یک مجموعه فقط یک‌بار شمرده می‌شوند. لذا مجموعه‌ی B با مجموعه‌ی

$$B = \{5, \{5, \emptyset\}\}$$

برابر است که این مجموعه، یک مجموعه‌ی دو عضوی است و تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با $2^2 = 4$. اکنون همه‌ی زیرمجموعه‌های این مجموعه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{\emptyset\}, \{\{5, \emptyset\}\}, B, \emptyset$$



۴: مجموعه‌ای ۲۵۶ زیرمجموعه دارد. این مجموعه چند عضو دارد؟



جواب

$$2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$$



مثال

۵: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $2k$ عضوی، ۳۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی

است. مقدار k را به دست آورید.

$$2^{2k} = 32 \times 2^k \Rightarrow 2^{2k} = 2^5 \times 2^k \Rightarrow 2^{2k} = 2^{k+5} \Rightarrow 2k = k+5 \Rightarrow k=5$$



۶: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n+3$ عضوی، ۵۶ واحد بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی است. مقدار n را به‌دست آورید.



$$2^{n+3} = 2^n + 56 \Rightarrow 2^{n+3} - 2^n = 56 \Rightarrow 2^n(2^3 - 1) = 56 \Rightarrow 2^n \times 7 = 56$$

$$\Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow 2^n = 2^3 \Rightarrow n = 3$$



۱: تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، n تا می‌باشد.



۲: تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، یکی می‌باشد که برابر با خود مجموعه است.



۳: تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:



$$\frac{n(n-1)}{2}$$

۷: مجموعه‌ی $E = \left\{ -2, -1, \frac{6}{2}, 3, 5, \frac{20}{4} \right\}$ را در نظر بگیرید. تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی، دو عضوی و



چهار عضوی آن را بیابید.

مجموعه‌ی E با مجموعه‌ی $E = \{-2, -1, 3, 5\}$ برابر است که این مجموعه چهار عضو دارد. با توجه به



نکته‌های ۹ و ۱۰، تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی آن ۴ تا و تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی آن یکی می‌باشد که برابر با خود مجموعه‌ی E است. تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن برابر است با:

$$\frac{4(4-1)}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

۸: یک مجموعه‌ی ۷ عضوی، چند زیرمجموعه‌ی دو عضوی دارد؟



$$n = 7 \Rightarrow \frac{7(7-1)}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$



یک مجموعه‌ی ۷ عضوی، ۲۱ زیرمجموعه‌ی دو عضوی دارد.

روش به دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی:
قبل از بیان این روش، لازم است به تعریف فاکتوریل که در سال‌های آینده خواهیم آموخت، بپردازیم:
فاکتوریل:

تعریف: حاصل ضرب عددهای طبیعی ۱ تا n را n فاکتوریل می‌نامند که با $n!$ و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

مثال ۹: حاصل $4!$ و $5! \times 2!$ را بیابید.

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! \times 2! = (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) \times (1 \times 2) = 120 \times 2 = 240$$

$$0! = 1, \quad 1! = 1$$

نکته ۴: طبق قرارداد داریم:

نکته ۵: همواره داریم:

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)! = \dots$$

مثال ۱۰: کسر $\frac{7! \times 3!}{4! \times 6!}$ را ساده کنید.

$$\frac{7! \times 3!}{4! \times 6!} = \frac{7 \times \cancel{6!} \times \cancel{3!}}{4 \times \cancel{3!} \times \cancel{6!}} = \frac{7}{4}$$

بیان روش: برای به دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

مثال ۱۱: تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه ۷ عضوی را به دست آورید.

$$\frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3!}}{\cancel{4!} \times \cancel{3!} \times \cancel{3!} \times 1} = 35$$

مثال ۱۲: تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به دست آورید.

$$\frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 5 \times \overset{1}{\cancel{2}}!}{\underset{1}{\cancel{2}}! \times \underset{1}{\cancel{2}}! \times 1} = 15$$

مثال

جواب

زیرمجموعه‌های محض (سره) یک مجموعه:

تعریف زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه عبارت است از: همه‌ی زیرمجموعه‌های آن مجموعه به جز خود مجموعه.

مثال ۱۳: زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی $A = \{2, 5\}$ را بنویسید.

$\{2\}, \{5\}, \emptyset$

نکته ۶: تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی n عضوی از رابطه‌ی $2^n - 1$ به دست می‌آید.

مثال ۱۴: تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه برابر با ۱۲۷ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

$$2^n - 1 = 127 \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7 \Rightarrow n = 7$$

مثال ۱۵: تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی $F = \left\{ \left\{ \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right\}, \left\{ \frac{5}{3} \right\}, \emptyset \right\}$ را بیابید و آن‌ها را بنویسید.

جواب مجموعه‌ی F سه عضو دارد. تعداد زیرمجموعه‌های محض آن برابر است با: $2^3 - 1 = 7$.

اکنون زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی F را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left\{ \left\{ \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right\}, \left\{ \frac{5}{3} \right\}, \emptyset \right\}, \left\{ \left\{ \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right\}, \left\{ \frac{5}{3} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right\}, \emptyset \right\}, \left\{ \left\{ \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right\}, \left\{ \frac{5}{3} \right\}, \emptyset \right\}$$

مثال ۱۶: اگر تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را دو برابر کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های محض آن برابر با ۶۳ خواهد شد.

تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را تعیین کنید.

جواب اگر مجموعه‌ی A ، n عضو داشته باشد و تعداد عضوهای آن را دو برابر کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های محض آن

برابر با $2^{2n} - 1$ خواهد بود. لذا داریم:

$$2^{2n} - 1 = 63 \Rightarrow 2^{2n} = 64 \Rightarrow 2^{2n} = 2^6 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$$

مثال ۱۷: اگر $n(A) + n(B) = 8$ و تعداد زیرمجموعه‌های A ، چهار برابر تعداد زیرمجموعه‌های B باشد، آن‌گاه

تعداد عضوهای مجموعه‌ی A و B را به دست آورید.

$$\begin{aligned} 2^{n(A)} &= 4 \times 2^{n(B)} \Rightarrow 2^{n(A)} = 2^2 \times 2^{n(B)} \Rightarrow 2^{n(A)} = 2^{n(B)+2} \\ &\Rightarrow n(A) = n(B) + 2 \Rightarrow n(A) - n(B) = 2 \end{aligned}$$

اکنون داریم:

$$\begin{cases} n(A) + n(B) = 8 \\ n(A) - n(B) = 2 \end{cases}$$

$$2n(A) = 10 \Rightarrow n(A) = 5 \quad (۱)$$

$$n(A) + n(B) = 8 \stackrel{(۱)}{\Rightarrow} 5 + n(B) = 8 \Rightarrow n(B) = 3$$

مجموعه‌ی توانی یک مجموعه:

تعریف مجموعه‌ی شامل تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه را مجموعه‌ی توانی آن مجموعه می‌نامند. مجموعه‌ی توانی

مجموعه‌ی A را با $P(A)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱۸: مجموعه‌ی توانی هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $A = \{-4, \{3/2\}\}$

$$P(A) = \{\{-4\}, \{\{3/2\}\}, \{-4, \{3/2\}\}, \emptyset\}$$

ب) $B = \{\circ, \{\circ\}, \{\emptyset\}\}$

$$P(B) = \{\{\circ\}, \{\{\circ\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\circ, \{\circ\}\}, \{\circ, \{\emptyset\}\}, \{\{\circ\}, \{\emptyset\}\}, \{\circ, \{\circ\}, \{\emptyset\}\}, \emptyset\}$$

نکته ۷: اگر مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، مجموعه‌ی $P(A)$ دارای 2^n عضو خواهد بود.

مثال ۱۹: اگر $A = \{\{-5\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ، حاصل $n(P(A))$ و $n(P(P(A)))$ را بیابید.

تعداد عضوهای مجموعه‌ی A برابر با ۲ است. اکنون داریم:

$$n(P(A)) = 2^2 = 4, \quad n(P(P(A))) = 2^4 = 16$$

۲۰: اگر $D = \left\{ \emptyset, \{2\}, \left\{ \frac{6}{3}, 2, 2 \right\}, \{\emptyset\} \right\}$ ، $P(D)$ ، $n(P(D))$ و $n(P(P(D)))$ را به دست بیاورید.

مثال

جواب

مجموعه‌ی D با مجموعه‌ی $D = \{\emptyset, \{2\}, \{\emptyset\}\}$ برابر است. اکنون داریم:

$$P(D) = \left\{ \{\emptyset\}, \{\{2\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{2\}, \{\emptyset\}\}, D, \emptyset \right\}$$

$$n(P(D)) = 8, \quad n(P(P(D))) = 2^8 = 256$$

حل مثال‌های مهم نمایش مجموعه‌ها:

۲۱: مجموعه‌ی توان‌های صحیح عدد ۳ را با علائم ریاضی و نوشتن اعضا نمایش دهید.

مثال

جواب

$$\left\{ 3^x \mid x \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \dots, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2, \dots \right\}$$

۲۲: مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.

مثال

الف) $A = \left\{ \frac{0}{3}, \frac{0}{03}, \frac{0}{003}, \dots \right\}$

$$A = \left\{ \frac{3}{10^k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

ب) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$$B = \left\{ x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{24}{x} \in \mathbb{N} \right\}$$

ج) $C = \{2, 5, 8, 11, \dots, 62\}$

$$C = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{I}, k \leq 20\}$$

د) $D = \left\{ 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$

$$D = \left\{ 2^x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 1 \right\}$$

ه) $E = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8\}$

$$E = \{4x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

و) $F = \{-42, -36, -30, \dots, 24\}$

$$F = \{k \mid k \in \mathbb{Z}, -7 \leq k \leq 4\}$$



جواب

$$z) G = \left\{ \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \dots \right\}$$



جواب

$$G = \left\{ \frac{x}{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -1 \right\}$$



مثال

۲۳: هریک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$$الف) A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N}, x < 5 \right\}$$



جواب

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$ب) B = \{4x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2\}$$



جواب

$$B = \{-4, 0, 4\}$$



جواب

$$ج) C = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 3 \right\}$$



جواب

$$C = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{5} \right\}$$



مثال

۲۴: مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.

$$الف) A = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$$



جواب

$$A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$ب) B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$



جواب

$$B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 6\}$$



مثال

۲۵: هریک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید و با نوشتن اعضا، آن‌ها را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی عددهای صحیحی که دو برابر آن‌ها بزرگ‌تر از -4 و کوچک‌تر از 5 است.



جواب

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < 2x < 5\}$$

نمایش مجموعه با نماد ریاضی:

$$\{-1, 0, 1, 2\}$$

نمایش مجموعه با نوشتن اعضا:

ب) مجموعه‌ی عددهای صحیحی که قدرمطلق آن‌ها برابر با ۲ است.



جواب

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| = 2\}$$

نمایش مجموعه با نماد ریاضی:

$$\{-2, 2\}$$

نمایش مجموعه با نوشتن اعضا:

۲۶: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ی $A = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$ را مشخص کنید.



مثال



جواب

داریم: $A = \{4, 8, 12, \dots\}$. چون عضو انتهای مجموعه‌ی A را نمی‌توان مشخص کرد، پس این مجموعه،

نامتناهی است.



مثال

۲۷: مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 17\}$

$$A = \{-4, -3, \dots, 4\}$$



جواب

ب) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \sqrt{-x} \in \mathbb{N}\}$

$$B = \{-1, -4, -9, \dots\}$$



جواب

ج) $C = \left\{ \frac{x-1}{x^2+2} \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x, x < 4 \right\}$

$$C = \left\{ \frac{-3}{6}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{11} \right\}$$



جواب

د) $D = \{2x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{I}, x^3 < 125\}$

$$D = \{1, 3, 9, 19, 33\}$$



جواب



مثال ۲۸: تعداد عضوهای هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 10 \leq x^2, x^2 < 57\}$$



جواب باید x هایی که در رابطه‌ی داده شده در مجموعه‌ی A صدق می‌کنند را پیدا کنیم.

$$10 \leq x^2, x^2 < 57 \Rightarrow 10 < x^2 < 57 \Rightarrow \sqrt{10} < \sqrt{x^2} < \sqrt{57} \Rightarrow 3/1 < x < 7/5$$

با توجه به نامساوی به دست آمده، نمایش مجموعه‌ی A با نوشتن عضوها به صورت زیر است:

$$A = \{4, 5, 6, 7\}$$

بنابراین داریم: $n(A) = 4$

$$\text{ب) } B = \{x^3 - 2 \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 5\}$$



جواب باید x هایی که در رابطه‌ی داده شده در مجموعه‌ی B صدق می‌کنند را پیدا کنیم.

$$x^2 < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x^2 < +\sqrt{5} \Rightarrow -2/1 < x < +2/1$$

با توجه به نامساوی اخیر، x های مورد نظر عبارتند از: $2, 1, 0, -1, -2$. اکنون این x ها را در عبارت $x^3 - 2$ قرار می‌دهیم تا عضوهای مجموعه‌ی B ساخته شود. لذا داریم:

$$B = \{-10, -3, -2, -1, 6\}$$

بنابراین داریم: $n(B) = 5$

حل مثال‌های مهم مجموعه‌های مساوی:



نکته ۸: ممکن است دو مجموعه با دو روش مختلف از نمایش‌های یک مجموعه مشخص شده باشند، ولی عضوهای یکسانی داشته باشند. در این حالت نیز می‌گوییم دو مجموعه با هم مساوی‌اند.



مثال ۲۹: جواد و حسین هر دو در یک مدرسه و در یک کلاس درس می‌خوانند. آیا مجموعه‌ی معلمین جواد با

مجموعه‌ی معلمین حسین مساوی است؟



جواب بله. از آنجاکه جواد و حسین، هر دو در یک مدرسه و در یک کلاس درس می‌خوانند، لذا معلمین آن‌ها با هم

یکسان است.



مثال ۳۰: آیا مجموعه‌ی عددهای اول یک رقمی با مجموعه‌ی عددهای فرد یک رقمی مساوی است؟



ابتدا عضوهای دو مجموعه را می‌نویسیم:

$$\{2, 3, 5, 7\} = \text{مجموعه‌ی عددهای اول یک رقمی}$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} = \text{مجموعه‌ی عددهای فرد یک رقمی}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، دو مجموعه‌ی داده شده با هم مساوی نیستند.



۳۱: مجموعه‌ی انسان‌هایی که در کره‌ی ماه زندگی می‌کنند، مساوی با کدام مجموعه است؟



از آنجاکه در کره‌ی ماه، هیچ انسانی زندگی نمی‌کند، لذا پاسخ مسئله، مجموعه‌ی تهی است.



۳۲: دو مجموعه‌ی $A = \{7, x, -y\}$ و $B = \{7, -2, 5\}$ مساوی هستند. مقدار xy را به دست آورید.



$$\begin{cases} x = -2 \\ -y = 5 \Rightarrow y = -5 \end{cases} \Rightarrow xy = (-2) \times (-5) = 10$$



۳۳: اگر دو مجموعه‌ی $A = \{2, 3, \{a - b, 1\}\}$ و $B = \{\{1\}, 2, a + b\}$ با هم مساوی باشند، مقدارهای a و b را به دست آورید.



$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1$$



۳۴: دو مجموعه‌ی $A = \{2, 4, a, b + 4\}$ و $B = \{4, 5, c\}$ با هم مساوی‌اند و مجموعه‌ی B ، سه عضوی

است. اگر a ، b و c عددهای طبیعی باشند، مقدار آن‌ها را به دست آورید.



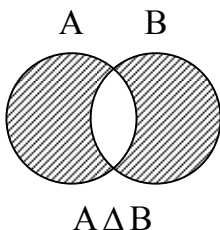
$$\begin{cases} a = 4 \\ b + 4 = 5 \Rightarrow b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

تفاضل متقارن دو مجموعه:

دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی عناصری که دقیقاً به یکی از دو مجموعه‌ی A یا B تعلق داشته باشند، تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی A و B نامیده می‌شود و آن را با $A \Delta B$ نمایش می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

نمودار ون تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی A و B به صورت زیر است:



نکته ۹: با توجه به نمودار بالا داریم:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

مثال ۳۵: اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ، مجموعه‌ی $A \Delta B$ را مشخص کنید.

مثال

جواب

$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

$$B - A = \{8, 10\}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 5, 8, 10\}$$

مثال ۳۶: دو مجموعه‌ی $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, x < 4\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 4\}$ را در نظر بگیرید.

مثال

مجموعه‌های $A \Delta B$ و $A \cup B$ ، $A \cap B$ را با عضوها مشخص کنید.

جواب

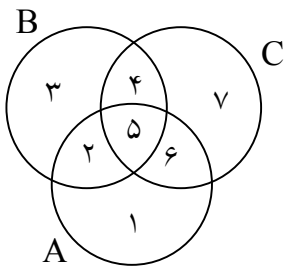
$$A = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3\}, \quad A \cup B = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3\} = A$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = A - \{1, 2, 3\} = \{\dots, -1, 0\}$$



۳۷: با توجه به شکل، کدام یک از مجموعه‌های زیر، نشان‌دهنده $(A - B) \cup (B \cap C)$ است؟



- (۱) $\{1, 6\}$
 (۲) $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
 (۳) $\{1, 4, 5, 6\}$
 (۴) $\{2, 4, 5, 6\}$



گزینه (۳) صحیح است. زیرا:

$$A - B = \{1, 6\}$$

$$B \cap C = \{4, 5\}$$

$$(A - B) \cup (B \cap C) = \{1, 4, 5, 6\}$$



۳۸: اگر $\mathbb{I}, \mathbb{N}, \mathbb{O}, \mathbb{E}$ به ترتیب مجموعه‌های عددهای طبیعی، مجموعه‌ی عددهای حسابی، مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد و مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج باشند، حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $(\mathbb{I} - \mathbb{N}) \cap (\mathbb{O} \cup \mathbb{E})$

$$(\mathbb{I} - \mathbb{N}) \cap (\mathbb{O} \cup \mathbb{E}) = \{\emptyset\} - \mathbb{N} = \emptyset$$

ب) $\mathbb{I} \Delta \mathbb{E}$

$$\mathbb{I} \Delta \mathbb{E} = (\mathbb{I} - \mathbb{E}) \cup (\mathbb{E} - \mathbb{I}) = \{\emptyset, 1, 3, 5, \dots\} \cup \emptyset = \{\emptyset, 1, 3, 5, \dots\}$$

ج) $(\mathbb{O} \cap \mathbb{E}) \cup (\mathbb{I} - \mathbb{N})$

$$(\mathbb{O} \cap \mathbb{E}) \cup (\mathbb{I} - \mathbb{N}) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$



۳۹: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3/5\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 3\}$ ، مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ و

$A - B$ را با علائم ریاضی بنویسید.

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 3\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3/5\}$$

$$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 3/5, x < -8\}$$



دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا):

تعریف دو مجموعه‌ی ناتهی که اشتراکشان تهی باشد، دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا) نامیده می‌شوند. یعنی:

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

مثال ۴۰: آیا دو مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 5\}$ جدا از هم هستند؟

جواب بله. زیرا دو مجموعه‌ی A و B ناتهی هستند، ولی اشتراکشان تهی است.

مثال ۴۱: سه مجموعه‌ی A ، B و C مثال بزنید که A و B جدا از هم، B و C جدا از هم، و A و C نیز جدا از هم باشند.

$$A = \{5, 6, 7\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{4, 8\}$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی:

اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، در این صورت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

الف) اگر $A \cap B \neq \emptyset$ ، در این صورت داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

ب) اگر $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت داریم:

مثال ۴۲: در یک گروه ۴۰ نفری، ۳۲ نفر به تئاتر و ۲۷ نفر به موسیقی علاقه‌مند هستند. در این گروه چند نفر هم به تئاتر و هم به موسیقی علاقه‌مند هستند؟

جواب مجموعه‌ی افرادی که به تئاتر علاقه‌مند هستند را با A و مجموعه‌ی افرادی که به موسیقی علاقه‌مند هستند را با B نمایش می‌دهیم. لذا داریم:

$$n(A) = 32, n(B) = 27$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$40 = 32 + 27 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 19$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

۱۰: اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، داریم:

مثال ۴۳: نکته ۱۰ را ثابت کنید.



مجموعه‌ی A را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

از طرفی می‌دانیم دو مجموعه‌ی $A - B$ و $A \cap B$ جدا از هم هستند. لذا داریم:

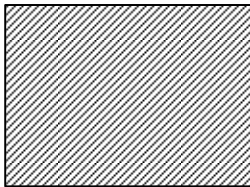
$$n(A) = n[(A - B) \cup (A \cap B)] = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

مجموعه‌ی مرجع:



در هر بحث معین، از اشیایی صحبت می‌شود که همه‌ی این اشیاء، عضوهای یک مجموعه به نام مجموعه‌ی مرجع می‌باشند. در واقع این مجموعه، عالم بحث را مشخص می‌کند. مجموعه‌ی مرجع را با U یا M نمایش می‌دهند. همچنین در نمودار ون، مجموعه‌ی مرجع را با مستطیل مشخص می‌کنند.

M



متمم یک مجموعه:

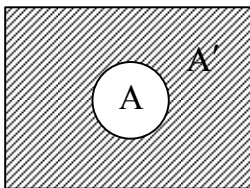


مجموعه‌ی عضوهایی از M که متعلق به مجموعه‌ی A نباشند، متمم مجموعه‌ی A نامیده می‌شود و با A' یا A^c نمایش داده می‌شود. مجموعه‌ی A' به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A' = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$$

نمودار ون متمم مجموعه‌ی A به صورت زیر است:

M



$$A \cap A' = \emptyset$$

۱۱: همواره داریم:



$$(A')' = A$$

۱۲: متمم متمم یک مجموعه، با خود آن مجموعه برابر است. یعنی:



$$M' = \emptyset, \emptyset' = M$$

نکته ۱۳: همواره داریم:



نکته ۱۴: اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه $B' \subseteq A'$.



نکته ۱۵: متمم‌های دو مجموعه‌ی مساوی، با هم مساوی‌اند.



مثال ۴۴: اگر $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ مجموعه‌ی مرجع و A مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۳ باشد و داشته باشیم



$A \subseteq M$ ، مجموعه‌ی A' را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$A' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\}$$



جواب

مثال ۴۵: اگر $M = \{vk \mid k \in \mathbb{N}\}$ و $A = \{14k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ، آن گاه مجموعه‌ی A' را با نوشتن اعضا و علائم ریاضی



مشخص کنید.

$$M = \{7, 14, 21, 28, \dots\}$$

$$A = \{14, 28, 42, 56, \dots\}$$

$$A' = \{7, 21, 35, 49, \dots\} = \{14k - 7 \mid k \in \mathbb{N}\}$$



جواب

خواص اجتماع و اشتراک دو مجموعه:

در اجتماع و اشتراک دو مجموعه، سه خاصیت وجود دارد:

الف) خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری): برای دو مجموعه‌ی A و B داریم:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی): برای سه مجموعه‌ی A ، B و C داریم:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

ج) خاصیت پخش‌پذیری (توزیع‌پذیری): برای سه مجموعه‌ی A ، B و C داریم:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

مثال ۴۶: درستی خاصیت پخشی را با مثال بررسی کنید.



جواب

فرض می‌کنیم:

$$A = \{2, 4, 5, 6\} \text{ و } B = \{1, 2, 3, 4, 7\} \text{ و } C = \{3, 4, 5, 8\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{2, 4, 5, 6\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad (1)$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = \{2, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\} = \{2, 4, 5\} \quad (1)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 4\} \cup \{4, 5\} = \{2, 4, 5\} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

حالت اول:

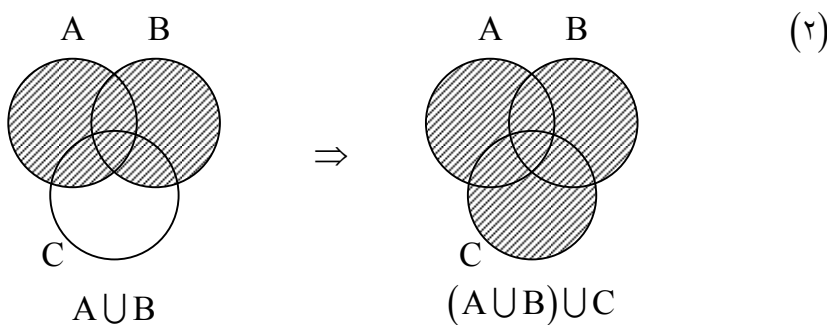
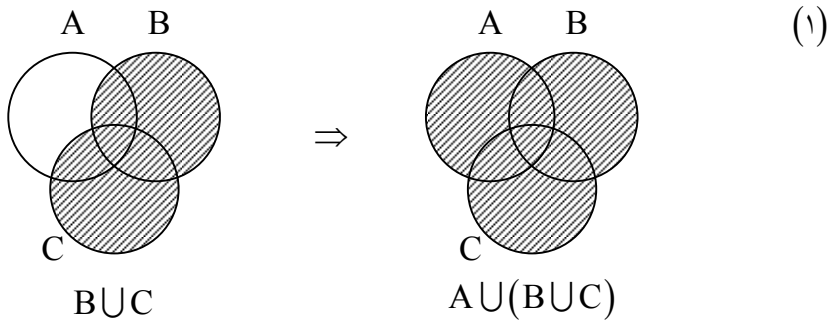
حالت دوم:

مثال ۴۷: درستی خاصیت شرکت‌پذیری را با نمودار ون بررسی کنید.



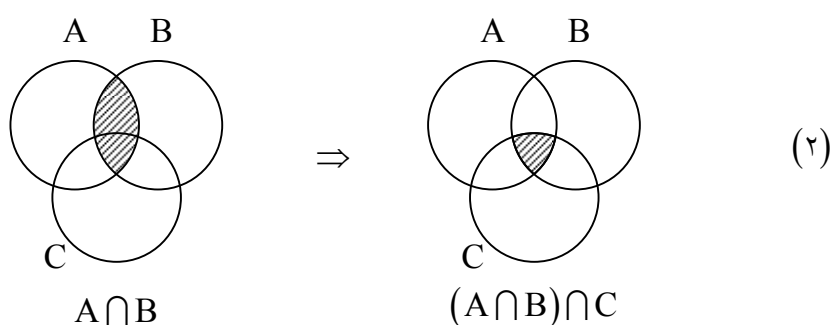
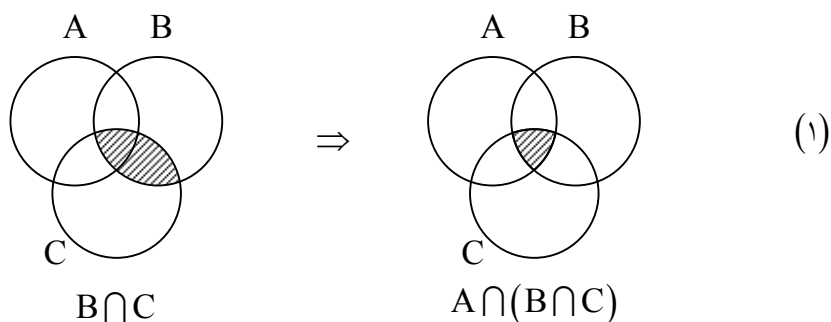
جواب

حالت اول:



$$(1) = (2) \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

حالت دوم:



$$(۱) = (۲) \Rightarrow A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

خواص تفاضل متقارن دو مجموعه:

در تفاضل متقارن دو مجموعه، دو خاصیت وجود دارد:

الف) خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری): برای دو مجموعه‌ی A و B داریم:

$$A \Delta B = B \Delta A$$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی): برای سه مجموعه‌ی A ، B و C داریم:

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

مثال ۴۸: خاصیت جابه‌جایی در تفاضل متقارن دو مجموعه را ثابت کنید.



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$$

قوانینی در مجموعه‌ها:



تعریف دسته قوانین کلی و پایه‌ای را که برای همه‌ی مجموعه‌ها برقرار است، قوانین مجموعه‌ها می‌نامند. این قوانین، بیش‌تر به‌صورت برابری‌هایی هستند که همواره صحیح می‌باشند و برای اثبات آن‌ها از نمودار ون یا تعریف استفاده می‌کنیم.

این قوانین عبارتند از:

- ۱) $\begin{cases} A \cup \emptyset = A \\ A \cup A = A \\ A \cup M = M \\ A \cup A' = M \end{cases}$ قوانین اجتماع
- ۲) $\begin{cases} A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cap A = A \\ A \cap M = A \\ A \cap A' = \emptyset \end{cases}$ قوانین اشتراک
- ۳) $\begin{cases} A - \emptyset = A \\ \emptyset - A = \emptyset \\ A - A = \emptyset \\ A - M = \emptyset \\ M - A = A' \\ A - A' = A \end{cases}$ قوانین تفاضل
- ۴) $\begin{cases} A \Delta \emptyset = A \\ A \Delta A = \emptyset \\ A \Delta M = A' \\ A \Delta A' = M \end{cases}$ قوانین تفاضل متقارن
- ۵) $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$ قوانین جذب
- ۶) $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$ قوانین دمورگان
- ۷) $\begin{cases} A \subseteq (A \cup B) \\ B \subseteq (A \cup B) \\ (A \cap B) \subseteq (A \cup B) \end{cases}$ قوانین زیرمجموعه در اجتماع
- ۸) $\begin{cases} (A \cap B) \subseteq A \\ (A \cap B) \subseteq B \\ (A \cap B) \subseteq (A \cup B) \end{cases}$ قوانین زیرمجموعه در اشتراک
- ۹) $\begin{cases} A - B \subseteq A \\ B - A \subseteq B \end{cases}$ قوانین زیرمجموعه در تفاضل
- ۱۰) $A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$
- ۱۱) $A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} (A \cap C) \subseteq (B \cap C) \\ (A \cup C) \subseteq (B \cup C) \end{cases}$

$$۱۲) A = B \Rightarrow \begin{cases} A \cap C = B \cap C \\ A \cup C = B \cup C \end{cases}$$

$$۱۳) A = B, C = D \Rightarrow \begin{cases} A \cup C = B \cup D \\ A \cap C = B \cap D \end{cases}$$

$$۱۴) A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$$

$$۱۵) A \Delta B = \emptyset \Rightarrow A = B$$

مثال ۴۹: قانون ۱۵ را ثابت کنید.

مثال

جواب

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Rightarrow (A - B = \emptyset, B - A = \emptyset) \Rightarrow$$

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

مثال ۵۰: قانون ۴ را ثابت کنید.

مثال

جواب

$$A \Delta \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A$$

اثبات $A \Delta \emptyset = A$

$$A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

اثبات $A \Delta A = \emptyset$

$$A \Delta M = (A - M) \cup (M - A) = \emptyset \cup A' = A'$$

اثبات $A \Delta M = A'$

$$A \Delta A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = M$$

اثبات $A \Delta A' = M$

مثال ۵۱: قوانین جذب (قانون ۵) را ثابت کنید.

مثال

جواب

اثبات $A \cup (A \cap B) = A$

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap M) \cup (A \cap B) = A \cap (M \cup B) = A \cap M = A$$

اثبات $A \cap (A \cup B) = A$

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) = A \cup (\emptyset \cap B) = A \cup \emptyset = A$$

$$A - B = A \cap B'$$

۱۶: اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع M باشند، داریم:

نکته

مثال ۵۲: ثابت کنید اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن گاه $A \cap B' = A$.

مثال



زآنجا که A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، لذا $A \cap B = \emptyset$. بنابراین:

$$A \cap B' = (A \cap B') \cup \emptyset = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap M = A$$



۱۷: خاصیت تعدی (ترایی) که برای هر سه مجموعه‌ی دلخواه A ، B و C برقرار است، به صورت زیر می‌باشد:

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$



۵۳: نکته ۱۷ را ثابت کنید.



$$\left. \begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow A \cap B = A \\ B \subseteq C &\Leftrightarrow B \cap C = B \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A = A \cap B = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap C \Rightarrow A \subseteq C$$



۵۴: اگر داشته باشیم $M = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ ، $A = \left\{x \mid \frac{24}{x} \in M\right\}$ و $B = \left\{x \mid \frac{x-1}{2} \in M\right\}$ ، حاصل

$M \Delta B$ و $A' \cap B'$ را به دست آورید.



$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}, \quad B = \{3, 5, 7, 9, \dots, 29\}$$

$$M \Delta B = (M - B) \cup (B - M) = B' \cup \emptyset = B'$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' = \{10, 14, 16, 18, 20, 22, 26, 28, 30\}$$



۵۵: با استفاده از قوانین مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$$



$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap (B' \cap C') =$$

$$[(A \cup B) \cap B'] \cap C' = [(A \cap B') \cup (B \cap B')] \cap C' = [(A \cap B') \cup \emptyset] \cap C' = (A \cap B') \cap C' =$$

$$(A - B) - C$$



۵۶: به کمک قوانین مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$A - (B \cup C) = (A - B) - C$$



$$A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$$

بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل:



تعریف

مجموعه‌ی A را در نظر می‌گیریم. اگر عمل $*$ در این مجموعه تعریف شده باشد، مجموعه‌ی A را نسبت به عمل $*$ بسته می‌نامند در صورتی که اگر هر دو عضو دلخواه a و b از مجموعه‌ی A را در نظر بگیریم، $a * b$ نیز متعلق به مجموعه‌ی A باشد.



مثال

۵۷: بررسی کنید که مجموعه‌ی عددهای گویا نسبت به کدام یک از چهار عمل اصلی بسته است؟



جواب

مجموعه‌ی عددهای گویا نسبت به جمع، تفریق و ضرب بسته است. زیرا حاصل جمع، حاصل تفریق و حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویا است. ولی نسبت به تقسیم بسته نیست. به‌عنوان مثال، تقسیم عدد ۲ بر صفر، عددی گویا نیست. (تعریف نشده است).



مثال

۵۸: بسته بودن مجموعه‌ی $A = \{2x^3 + 5 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ را نسبت به چهار عمل اصلی بررسی کنید.



جواب

مجموعه‌ی A را با اعضا مشخص می‌کنیم. لذا داریم:

$$A = \{\dots, -11, 3, 5, 7, 21, \dots\}$$

مجموعه‌ی A نسبت به هیچ‌یک از چهار عمل اصلی بسته نیست. زیرا:

$$3 + 7 = 10 \notin A$$

$$-11 \times 3 = -33 \notin A$$

$$7 - 3 = 4 \notin A$$

$$3 \div 7 = \frac{3}{7} \notin A$$

حل مثال‌های مهم مجموعه‌ها و احتمال:



مثال

۵۹: سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر رو بیاید، سکه را دو بار دیگر

پرتاب می‌کنیم.

الف) مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید و آن را S بنامید.



جواب

$$S = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, ر), (پ, ر), (ر, پ), (پ, پ)\}$$

ب) اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً یک‌بار سکه پشت بیاید، عضوهای این پیشامد را بنویسید.



جواب

$$A = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (پ, ر), (ر, پ)\}$$

ج) اگر B پیشامدی باشد که در آن دقیقاً دو بار سکه رو بیاید، عضوهای این پیشامد را بنویسید.

$$B = \{(ر,ر,پ), (پ,ر,ر)\}$$



د) پیشامد $A' \cup B$ را بنویسید.

$$A' = \{(ر,ر,ر), (ر,پ,پ)\}$$

$$A' \cup B = \{(ر,ر,ر), (ر,پ,پ), (ر,ر,پ), (پ,ر,ر)\}$$



مثال ۶۰: هر یک از عددهای طبیعی زوج کوچک‌تر یا مساوی ۲۰ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن



کارت‌ها، یکی از آن‌ها را به تصادف برمی‌داریم.

الف) مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید و آن را S بنامید.

$$S = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰\}$$



ب) اگر A پیشامدی باشد که در آن عدد روی کارت مضرب ۵ باشد، احتمال رخ دادن پیشامد A را تعیین کنید.

$$A = \{۱۰, ۲۰\}$$

$$n(S) = ۱۰, \quad n(A) = ۲$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$$



ج) اگر B پیشامدی باشد که در آن عدد روی کارت کوچک‌تر از ۶ باشد، احتمال رخ دادن پیشامد B را تعیین کنید.

$$B = \{۲, ۴\}$$

$$n(S) = ۱۰, \quad n(B) = ۲$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$$



د) پیشامد $A' \cap B$ را بنویسید و احتمال رخ دادن آن را تعیین کنید.

$$S = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰\}$$

$$A' \cap B = \{۲, ۴\}$$

$$n(S) = ۱۰, \quad n(A' \cap B) = ۲$$

$$P(A' \cap B) = \frac{n(A' \cap B)}{n(S)} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$$





مثال

۶۱: یک طرف سکه‌ای عدد ۱ و طرف دیگر آن عدد ۲ نوشته شده است. این سکه را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این که مجموع رقم‌های ظاهر شده برابر ۵ باشد.



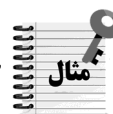
جواب

$$S = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2), (2,2,2)\}$$

$$A = \{(2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)\}$$

$$n(S) = 8, \quad n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$



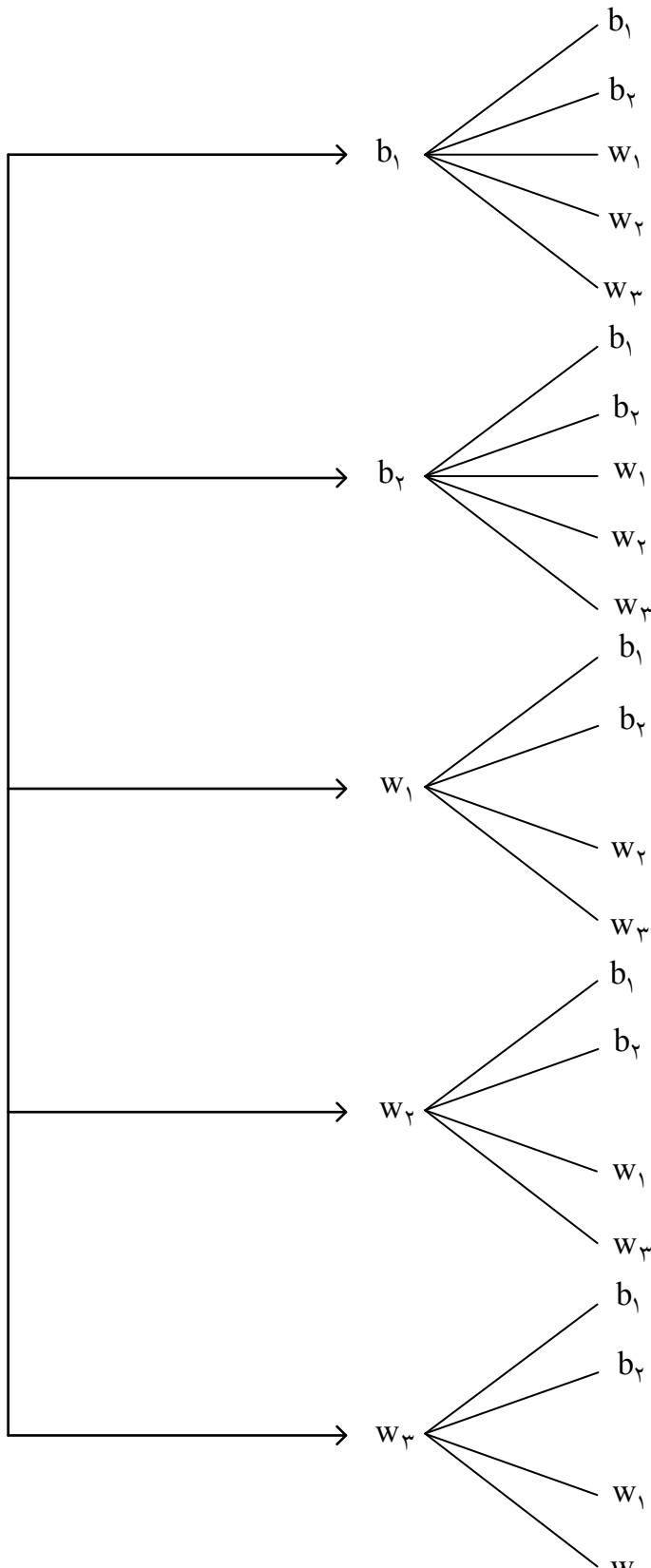
مثال

۶۲: در ظرفی ۲ مهره سیاه متمایز و ۳ مهره سفید متمایز قرار دارد. به‌طور تصادفی دو مهره به‌ترتیب از این ظرف برمی‌داریم؛ بدین صورت که اگر مهره اول سیاه باشد، مهره را به ظرف برگردانده و سپس مهره دوم را خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال این که:
الف) حداقل یک‌بار مهره سیاه ظاهر شود.



جواب

اگر مهره‌های سیاه را با b_1 و b_2 و مهره‌های سفید را با w_1 ، w_2 و w_3 نشان دهیم، داریم:



$$S = \{(b_1, b_1), (b_1, b_2), (b_1, w_1), (b_1, w_2), (b_1, w_3), (b_2, b_1), (b_2, b_2), (b_2, w_1), (b_2, w_2), (b_2, w_3), (w_1, b_1), (w_1, b_2), (w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_2, b_1), (w_2, b_2), (w_2, w_1), (w_2, w_2), (w_2, w_3), (w_3, b_1), (w_3, b_2), (w_3, w_1), (w_3, w_2)\}$$

$$A = \{(b_1, b_1), (b_1, b_2), (b_1, w_1), (b_1, w_2), (b_1, w_3), (b_2, b_1), (b_2, b_2), (b_2, w_1), (b_2, w_2), (b_2, w_3), (w_1, b_1), (w_1, b_2), (w_2, b_1), (w_2, b_2), (w_3, b_1), (w_3, b_2)\}$$

$$n(S) = 22, \quad n(A) = 16$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

ب) مهره‌های اول و دوم هم‌رنگ باشند.

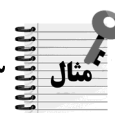


$$B = \{(b_1, b_1), (b_1, b_2), (b_2, b_1), (b_2, b_2), (w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_3, w_1), (w_3, w_2)\}$$

$$n(S) = 22, \quad n(B) = 10$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$$

مثال ۶۳: در یک کیسه ۴۸ مهره وجود دارد که $\frac{1}{6}$ آن‌ها قرمز، $\frac{1}{4}$ آن‌ها زرد، نیمی از آن‌ها آبی و بقیه سفید هستند.



الف) از هر رنگ چه تعداد مهره درون کیسه است؟



$$\frac{1}{6} \times 48 = 8 \quad \text{تعداد مهره‌های قرمز}$$

$$\frac{1}{4} \times 48 = 12 \quad \text{تعداد مهره‌های زرد}$$

$$\frac{1}{2} \times 48 = 24 \quad \text{تعداد مهره‌های آبی}$$

$$48 - (8 + 12 + 24) = 4 \quad \text{تعداد مهره‌های سفید}$$

ب) اگر به تصادف یک مهره از کیسه خارج کنیم، احتمال‌های زیر را تعیین کنید.

(۱) مهره قرمز باشد.

(۲) مهره سفید باشد.

(۳) مهره زرد یا آبی باشد.

(۴) مهره قرمز نباشد.



$$n(S) = 48$$

$$n(A) = 8$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

(۱)

$$n(B) = 4 \quad (۲)$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

$$n(C) = 12 + 24 = 36 \quad (۳)$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

$$P(D) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad (۴)$$

مثال ۶۴: روی یک صفحه شطرنج (۸×۸) یک نقطه درون یکی از خانه‌ها انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال این که نقطه روی خانه‌ی سفید نباشد، چه قدر است؟

جواب: روی خانه‌ی سفید نبودن یعنی روی خانه‌ی سیاه بودن و چون نصف خانه‌های شطرنج سیاه است، پس داریم:

$$P(A) = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

ب) احتمال این که نقطه نه روی خانه‌ی سفید و نه روی خانه‌ی سیاه و نه روی خطوط بین آن‌ها باشد، چه قدر است؟

جواب: احتمال این پیشامد صفر است؛ زیرا چنین امکانی وجود ندارد (همه‌ی خانه‌های موجود یا سیاه هستند یا سفید).

$$P(B) = 0$$

ج) احتمال این که نقطه روی خانه‌ی سفید یا سیاه باشد، چه قدر است؟

جواب: احتمال این پیشامد ۱ است؛ زیرا یک پیشامد حتمی است (مهره یا روی خانه‌های

سیاه).

$$P(C) = 1$$



۱- اگر A ، B و C سه مجموعه بوده و داشته باشیم $B \cup C = B$ و $A \cap C = A$ ، رابطه‌ی بین سه مجموعه‌ی A ، B و C را مشخص کنید. سپس وضعیت سه مجموعه را با استفاده از نمودار ون نشان دهید.

۲- هرگاه تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $2k$ عضوی 32 برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی باشد، مقدار k را به دست آورید.

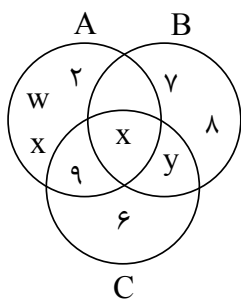
۳- اگر $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 20\}$ ، $A = \left\{x \in M \mid \frac{18}{x} \in M\right\}$ ، $B = \{x \mid x \in M, x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ و $C = \{x \mid x \in M, 4 < x, x < 16\}$ ، آن‌گاه:

الف) مجموعه‌های M ، A ، B و C را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

ب) $(B - C) - A$ را بیابید.

ج) حاصل $(A \Delta B) \Delta C$ را بنویسید.

۴- مطابق شکل زیر، سه مجموعه‌ی A ، B و C مفروض هستند. اگر $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، $A \cap B = \{1\}$ و $B \cap C = \{1, 3\}$ ، حاصل $w + z$ را به دست آورید.



۵) سکه‌ای را ۵ بار می‌اندازیم. احتمال این که دقیقاً ۴ بار رو بیاید، چه قدر است؟



دانش‌آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های بیشتر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.